

Οι φυσικοί αριθμοί

A.1.1

Φυσικοί αριθμοί – Διάταξη φυσικών – Στρογγυλοποίηση

Φυσικοί αριθμοί

Ορισμός

1. **Φυσικοί αριθμοί** λέγονται οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, ... και συμβολίζονται με το γράμμα **N** (το οποίο είναι το αρχικό γράμμα της λέξης Nature, που σημαίνει φύση), δηλαδή $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
2. **Άρτιος** (ή **ζυγός**) λέγεται κάθε φυσικός αριθμός που τελειώνει σε 0, 2, 4, 6, 8.
3. **Περιττός** (ή **μονός**) λέγεται κάθε φυσικός αριθμός που τελειώνει σε 1, 3, 5, 7, 9.

Παρατηρήσεις

- 1 Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο αριθμό.
- 2 Κάθε φυσικός αριθμός (εκτός από το 0) έχει έναν προηγούμενο φυσικό αριθμό.
- 3 Ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός.
- 4 Αφού κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο, οι φυσικοί αριθμοί μπορούν να συνεχίζονται ατελείωτα και, όπως λέμε, είναι **άπειροι**.
- 5 Οι φυσικοί αριθμοί χωρίζονται σε: **α)** άρτιους ή περιττούς, **β)** μονοψήφιους (έχουν ένα ψηφίο), διψήφιους (έχουν δύο ψηφία), τριψήφιους (έχουν τρία ψηφία) κτλ.

Δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

Για να γράψουμε ένα φυσικό αριθμό, χρησιμοποιούμε τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ο τρόπος με τον οποίο διαβάζουμε, συμβολίζουμε και ονομάζουμε ένα φυσικό αριθμό μάς δίνει το **δεκαδικό σύστημα αρίθμησης**.

Για να ονομάσουμε ένα φυσικό αριθμό, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Χωρίζουμε το φυσικό αριθμό από δεξιά ανά τρία ψηφία.
- Έτσι, η πρώτη (από δεξιά) τριάδα αποτελεί τις μονάδες, η δεύτερη τις χιλιάδες, η τρίτη τα εκατομμύρια, η τέταρτη τα δισεκατομμύρια κτλ.
- Για να διαβάσουμε το δοσμένο αριθμό, παίρνουμε κάθε τριάδα από αριστερά προς τα δεξιά και ανάλογα με τη θέση της ενώνουμε το ανάλογο συνθετικό.

↳ Παράδειγμα

Ο αριθμός 1.345.405 διαβάζεται 1 εκατομμύριο 345 χιλιάδες και 405 μονάδες. Επιπλέον, το πρώτο από δεξιά ψηφίο καλείται **ψηφίο των μονάδων**, το δεύτερο **ψηφίο των δεκάδων**, το τρίτο **ψηφίο των εκατοντάδων**, το τέταρτο **ψηφίο των χιλιάδων**, το πέμπτο **ψηφίο των δεκάδων χιλιάδων**, το έκτο **ψηφίο των εκατοντάδων χιλιάδων**, το έβδομο **ψηφίο των εκατομμυρίων** κτλ. Σχηματικά έχουμε:

Δισεκατομμύρια			Εκατομμύρια			Χιλιάδες			Μονάδες								
δ	δ	δ															
ε	ι	ι															
κ	σ	σ	ε	ε	ε	ε				ε							
α	ε	ε	κ	κ	κ	κ	χ	χ	χ	κ							
τ	κ	δ	κ	κ	α	α	α	ι	δ	ι	ι	α	δ	μ			
ο	α	ε	α	α	τ	τ	ε	τ	τ	λ	ε	λ	λ	τ	ε	ο	
ν	τ	κ	τ	τ	ο	ο	κ	ο	ο	ο	ι	κ	ι	ι	ο	κ	ν
τ	ο	ά	ο	ο	ν	μ	ά	μ	μ	ν	ά	ά	ά	ά	ν	ά	ά
ά	μ	δ	μ	μ	τ	μ	δ	μ	μ	τ	δ	δ	δ	δ	τ	δ	δ
δ	μ	ε	μ	μ	ά	ύ	ε	ύ	ύ	ά	ε	ε	ε	ε	ά	ε	ε
ε	ύ	ς	ύ	ύ	δ	ρ	ς	ρ	ρ	δ	ς	ς	ς	ς	δ	ς	ς
ς	ρ	ρ	ρ	ρ	ε	ι	ι	ι	ε					ε			
ι	ι	ι	ι	ι	ς	α	α	α	ς					ς			
α	α	α															
									1	0	8	7	5	4	6		
			1	0	3	7	4	5	0	0	9	8					

Οι αριθμοί αυτοί διαβάζονται:

1.087.546 → ένα εκατομμύριο ογδόντα επτά χιλιάδες πεντακόσιες σαράντα έξι μονάδες

1.037.450.098 → ένα δισεκατομμύριο τριάντα επτά εκατομμύρια τετρακόσιες πενήντα χιλιάδες και ενενήντα οκτώ μονάδες

Διάταξη φυσικών αριθμών

Ορισμός

Σύγκριση δύο αριθμών είναι η διαδικασία που μας δείχνει αν οι αριθμοί είναι ίσοι ή ποιος από τους δύο είναι μεγαλύτερος (ή μικρότερος).

Για να συγκρίνουμε δύο αριθμούς, χρησιμοποιούμε τα σύμβολα:

- το ίσον $(=)$ για ίσους αριθμούς,
το διάφορο (\neq) για άνισους αριθμούς,
το μεγαλύτερο από $(>)$ όταν ο αριθμός αριστερά είναι μεγαλύτερος,
το μικρότερο από $(<)$ όταν ο αριθμός αριστερά είναι μικρότερος,
το μεγαλύτερο ή ίσο από (\geq) όταν ο αριθμός αριστερά είναι μεγαλύτερος ή ίσος,
το μικρότερο ή ίσο από (\leq) όταν ο αριθμός αριστερά είναι μικρότερος ή ίσος.

➡ Παραδείγματα

$$5 = 5, 10 \neq 5, 6 < 7, 8 > 4, 4 \leq 4, 5 \geq 5, 6 \geq 5, 8 \leq 10.$$

Κανόνες σύγκρισης

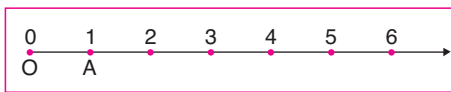
Για να συγκρίνουμε δύο φυσικούς αριθμούς, αρχικά μετράμε τα ψηφία τους.

- > Αν κάποιος έχει περισσότερα ψηφία, είναι ο μεγαλύτερος.
- > Αν έχουν το ίδιο πλήθος ψηφίων, τότε συγκρίνουμε τα ψηφία της μεγαλύτερης τάξης (τα πρώτα από αριστερά). Αν κάποιος είναι μεγαλύτερος, τότε ο αριθμός στον οποίο βρίσκεται είναι ο μεγαλύτερος. Αν είναι ίσα, συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία με το δεύτερο από αριστερά ψηφίο κτλ.

➡ Παραδείγματα

$$56 < 123, 3.405 > 3.298, 9.997 > 9.996.$$

Το γεγονός ότι μπορούμε να συγκρίνουμε τους φυσικούς αριθμούς μάς δίνει τη δυνατότητα να τους διατάξουμε (να τους βάλουμε στη σειρά) από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο, δηλαδή $0 < 1 < 2 < 3 < \dots$. Επιπλέον, μας δίνεται η δυνατότητα να τους παραστήσουμε πάνω σε μια ευθεία γραμμή. Θεωρούμε μια ευθεία



και επιλέγουμε ένα σημείο O πάνω σε αυτήν και ένα σημείο A δεξιά του, το οποίο εκφράζει το 1. Τότε, με μονάδα μέτρησης το OA βρίσκουμε τους επόμενους φυσικούς αριθμούς.

Η γραμμή αυτή λέγεται **ημιάξονας** των αριθμών και το O λέγεται **αρχή του ημιάξονα**.

Στρογγυλοποίηση

Ορισμός

Στρογγυλοποίηση είναι η διαδικασία με την οποία αντικαθιστούμε τον αριθμό με μια προσέγγισή του, δηλαδή μικραίνουμε ή μεγαλώνουμε τον αριθμό ώστε να γίνει πιο εύχρηστος.

Κανόνες στρογγυλοποίησης

1. Αν το ψηφίο της επόμενης τάξης προς τα δεξιά είναι 0, 1, 2, 3, 4 (μικρότερο του 5), αφήνουμε τον αριθμό όπως είναι μέχρι το ψηφίο που κάνουμε στρογγυλοποίηση και βάζουμε τα υπόλοιπα ψηφία προς τα δεξιά ίσα με μηδέν.
2. Αν το ψηφίο της επόμενης τάξης προς τα δεξιά είναι 5, 6, 7, 8, 9 (μεγαλύτερο ή ίσο του 5), αυξάνουμε κατά μία μονάδα το ψηφίο της τάξης που γίνεται η στρογγυλοποίηση και βάζουμε τα υπόλοιπα ψηφία προς τα δεξιά ίσα με μηδέν.

⚠ Παρατηρήσεις

- 1 Στρογγυλοποίηση μπορεί να γίνει σε οποιοδήποτε ψηφίο του αριθμού, αναφέροντας πάντα την τάξη στην οποία γίνεται. Έτσι, μιλούμε για στρογγυλοποίηση στη μονάδα, στη δεκάδα, στην εκατοντάδα κτλ. Είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε το ψηφίο στρογγυλοποίησης!!!
- 2 Το σύμβολο \approx διαβάζεται «περίπου ίσο με» και συχνά χρησιμοποιείται στη στρογγυλοποίηση.

ΛΥΜΕΝΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Διάβασε προσεκτικά τη θεωρία;



Α' ΜΟΡΦΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

- 1 Να ονομάσετε τους φυσικούς αριθμούς: 7.234, 34.006, 2.304.798.

ΛΥΣΗ

- 7.234 → επτά χιλιάδες και διακόσιες τριάντα τέσσερις μονάδες ή επτά χιλιάδες διακόσια τριάντα τέσσερα
- 34.006 → τριάντα τέσσερις χιλιάδες και έξι μονάδες ή τριάντα τέσσερις χιλιάδες έξι
- 2.304.798 → δύο εκατομμύρια τριακόσιες τέσσερις χιλιάδες και επτακόσιες ενενήντα οκτώ μονάδες ή δύο εκατομμύρια τριακόσιες τέσσερις χιλιάδες επτακόσια ενενήντα οκτώ.

- 2 Να γράψετε τους ακόλουθους αριθμούς: α) τετρακόσια εξήντα οκτώ, β) δύο χιλιάδες και επτά, γ) τρία εκατομμύρια και διακόσια πενήντα.

ΛΥΣΗ

α) 468, β) 2.007, γ) 3.000.250.

- 3 Να βρείτε την τάξη του υπογραμμισμένου ψηφίου στους παρακάτω φυσικούς αριθμούς: α) 234, β) 6.783, γ) 92.081, δ) 709.934, ε) 1.234.567.

ΛΥΣΗ

α) Δεκάδες, β) χιλιάδες, γ) μονάδες, δ) δεκάδες χιλιάδες, ε) εκατοντάδες.

- 4 Αν σήμερα είναι Δευτέρα, τι μέρα θα είναι μετά από 17 μέρες;

ΛΥΣΗ

Αφού $17 = 14 + 3$, οι 17 μέρες είναι δύο εβδομάδες και 3 μέρες, άρα θα έχουμε Πέμπτη.

Κάθε 7 μέρες (1 εβδομάδα) έχουμε την ίδια μέρα.

- 5 Πόσες είναι οι σελίδες ενός βιβλίου ανάμεσα στη σελίδα 35 και στη σελίδα 41;

ΛΥΣΗ

$41 - 35 - 1 = 5$ (οι 36, 37, 38, 39, 40).

Οι φυσικοί αριθμοί ανάμεσα στο α και στο β είναι: $\beta - \alpha - 1$ ($\beta > \alpha$).

- 6 Πόσες είναι οι σελίδες ενός κεφαλαίου που αρχίζει στη σελίδα 35 και τελειώνει στη σελίδα 61;

ΛΥΣΗ

$61 - 35 + 1 = 27$ (οι 35, 36, 37, ..., 60, 61).

Οι φυσικοί αριθμοί από το α μέχρι και το β είναι: $\beta - \alpha + 1$ ($\beta > \alpha$).

Β' ΜΟΡΦΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- 7 α) Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς: 345, 344, 56, 102, 67, 239.
β) Να βάλετε σε φθίνουσα σειρά τους αριθμούς: 67, 125, 120, 152, 76, 102.

ΛΥΣΗ

α) $56 < 67 < 102 < 239 < 344 < 345$.

β) $152 > 125 > 120 > 102 > 76 > 67$.

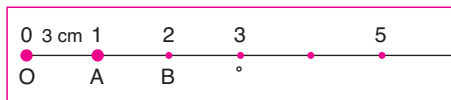
> Αύξουσα σειρά: από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.
> Φθίνουσα σειρά: από το μεγαλύτερο στο μικρότερο.

- 8** Να κατασκευάσετε έναν ημιάξονα με μονάδα μέτρησης OA ίσο με 3 cm . Να τοποθετήσετε τα σημεία B, Γ, Δ σε αποστάσεις $6\text{ cm}, 9\text{ cm}, 15\text{ cm}$. Ποιοι αριθμοί αντιστοιχούν στα σημεία αυτά;

ΛΥΣΗ

Κατασκευάζουμε τον ημιάξονα και προκύπτει το διπλανό σχήμα.

Επιπλέον, αφού το OA εκφράζει τη μονάδα μέτρησης, στο A αντιστοιχεί το 1 , στο B το 2 ($2 \cdot 3\text{ cm}$), στο Γ το 3 ($3 \cdot 3\text{ cm}$) και στο Δ το 5 ($5 \cdot 3\text{ cm}$).



Γ' ΜΟΡΦΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- 9** Να στρογγυλοποιήσετε τους ακόλουθους αριθμούς στη δεκάδα:
α) 561 , β) 1.287 , γ) 12.099 .

ΛΥΣΗ

- α) Εντοπίζουμε το ψηφίο των δεκάδων του 561 , που είναι το 6 . Το αμέσως δεξιά ψηφίο του είναι το 1 , που ανήκει στην πρώτη ομάδα ($0, 1, 2, 3, 4$), άρα γίνεται 0 και το 6 παραμένει 6 , δηλαδή ο ζητούμενος στρογγυλοποιημένος αριθμός είναι ο 560 .
- β) Εντοπίζουμε το ψηφίο των δεκάδων του 1.287 , που είναι το 8 . Το αμέσως δεξιά ψηφίο του είναι το 7 , που ανήκει στη δεύτερη ομάδα ($5, 6, 7, 8, 9$), άρα γίνεται 0 και το 8 γίνεται 9 , δηλαδή ο ζητούμενος στρογγυλοποιημένος αριθμός είναι ο 1.290 .
- γ) Εντοπίζουμε το ψηφίο των δεκάδων του 12.099 , που είναι το 9 . Το αμέσως δεξιά ψηφίο του είναι το 9 , που ανήκει στη δεύτερη ομάδα ($5, 6, 7, 8, 9$), άρα γίνεται 0 και το 9 γίνεται 10 !!! Προφανώς αυτό δεν μπορεί να συμβεί, οπότε το 9 γίνεται 0 και η εκατοντάδα (10 δεκάδες) προστίθεται στις εκατοντάδες και έτσι το 0 γίνεται 1 , δηλαδή ο ζητούμενος στρογγυλοποιημένος αριθμός είναι ο 12.100 .

- 10** Να στρογγυλοποιήσετε τον αριθμό 9.999 στην εκατοντάδα.

ΛΥΣΗ

Εντοπίζουμε το ψηφίο των εκατοντάδων του 9.999 , που είναι το 9 (9.999). Το αμέσως δεξιά ψηφίο του είναι το 9 , που ανήκει στη δεύτερη ομάδα, άρα γίνεται 0 και το 9 γίνεται 10 !!! Προφανώς αυτό δεν μπορεί να συμβεί, οπότε προσθέτουμε 1 στη χιλιάδα και έτσι το 9 γίνεται 10 !!! Επομένως στο ψηφίο των δεκάδων χιλιάδων (το 0) προσθέτουμε 1 , και το 0 (09.999) γίνεται 1 , δηλαδή ο ζητούμενος στρογγυλοποιημένος αριθμός είναι ο 10.000 .

- 11** Ποιοι είναι οι φυσικοί αριθμοί που, αν τους στρογγυλοποιήσουμε στην πλησιέστερη δεκάδα, παίρνουμε τον αριθμό 70;

ΛΥΣΗ

Στο 70 το ψηφίο των δεκάδων είναι το 7. Από τους κανόνες στρογγυλοποίησης γνωρίζουμε ότι το ψηφίο στο οποίο στρογγυλοποιούμε είτε παραμένει ίδιο είτε αυξάνεται κατά ένα, δηλαδή το ψηφίο των δεκάδων του αρχικού αριθμού είναι 6 ή 7, άρα οι αριθμοί θα έχουν μορφή: 6_ ή 7_.

- > Αν ο αριθμός είναι ο 6_, για να γίνει 70, θα πρέπει η κενή θέση να είναι 5, 6, 7, 8 ή 9, ώστε με τη στρογγυλοποίηση το 6 να γίνει 7. Συνεπώς οι αριθμοί είναι: 65, 66, 67, 68 ή 69.
- > Αν ο αριθμός είναι ο 7_, για να γίνει 70, θα πρέπει η κενή θέση να είναι 0, 1, 2, 3 ή 4, ώστε με τη στρογγυλοποίηση το 7 να παραμείνει 7. Συνεπώς οι αριθμοί είναι: 70, 71, 72, 73 ή 74.

Επομένως οι αριθμοί είναι οι: 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73 ή 74.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΝΕΟΥ ΤΥΠΟΥ

Να συμπληρώσετε τα κενά στις ακόλουθες φράσεις. Ειδικά για τις ερωτήσεις 1 και 2 να συμπληρώσετε με $<$, $>$, $=$.

1. Αφού $12 \dots 13$ και $15 \dots 13$, τότε $12 \dots 15$.
2. $123 + 346 \dots 184 + 285$.
3. Ο αριθμός 7.162 στρογγυλοποιείται στη δεκάδα ως και στην εκατοντάδα ως
4. Ανάμεσα στο 145 και στο 732 υπάρχουν φυσικοί αριθμοί.
5. Αν σε έναν ημιάξονα $OA = 4 \text{ cm}$ και $OB = 12 \text{ cm}$, το Β εκφράζει τον αριθμό ...

ΑΛΥΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μελέτησες επαρκώς τις λυμένες;



Α' Ομάδα

1. Να ονομάσετε τους φυσικούς αριθμούς: 4.903, 13.209, 123.456.789.

2. Να γράψετε τους ακόλουθους αριθμούς: **α)** χίλια οκτακόσια έξι, **β)** επτακόσια είκοσι πέντε, **γ)** οκτώ χιλιάδες τριάντα δύο, **δ)** δύο εκατομμύρια δέκα χιλιάδες και τριακόσια εβδομήντα οκτώ.
3. Να βρείτε την τάξη του υπογραμμισμένου ψηφίου στους παρακάτω φυσικούς αριθμούς: **α)** 3.124, **β)** 16.002, **γ)** 316, **δ)** 892, **ε)** 231.234.567.
4. Να γράψετε τους άρτιους από το 125 ως το 141.
5. Να γράψετε τους περιττούς αριθμούς από το 562 ως το 580.
6. Αν σήμερα είναι Δευτέρα, τι μέρα θα είναι: **α)** μετά από 21 μέρες, **β)** μετά από 30 μέρες, **γ)** μετά από 234 μέρες;
7. Πόσες διανυκτερεύσεις θα γίνουν σε μια πενήμερη εκδρομή;
8. Πόσες είναι οι σελίδες ενός βιβλίου ανάμεσα στη σελίδα 178 και στη σελίδα 443;
9. Από το βιβλίο των Μαθηματικών δόθηκαν στους μαθητές για το επόμενο μάθημα οι ασκήσεις από την 4 ως και την 8. Πόσες ασκήσεις δόθηκαν;
10. Πόσες είναι οι σελίδες ενός κεφαλαίου που αρχίζει στη σελίδα 96 και τελειώνει στη σελίδα 678;
11. **α)** Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς: 987, 789, 897, 879, 978, 798. **β)** Να βάλετε σε φθίνουσα σειρά τους αριθμούς: 120, 210, 12, 21, 102, 201.
12. Να κατασκευάσετε έναν ημιάξονα με μονάδα μέτρησης ΟΑ ίσο με 4 cm. Να τοποθετήσετε τα σημεία Β, Γ, Δ σε αποστάσεις 8 cm, 20 cm, 36 cm. Ποιοι αριθμοί αντιστοιχούν στα σημεία αυτά;
13. Να στρογγυλοποιήσετε τους ακόλουθους αριθμούς στην εκατοντάδα: **α)** 872, **β)** 31.526, **γ)** 87.919, **δ)** 999.
14. Να στρογγυλοποιήσετε τον αριθμό 12.702.935: **α)** στη δεκάδα, **β)** στην εκατοντάδα, **γ)** στις δεκάδες χιλιάδες, **δ)** στα εκατομμύρια.
15. Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα κάνοντας τις στρογγυλοποιήσεις στο ψηφίο που ζητείται.

	Χιλιάδα	Εκατοντάδα	Δεκάδα
12.345			
3.451			
908.615			
70.002			

Β' Ομάδα

- 16.** Να γράψετε όλους τους τετραψήφιους φυσικούς αριθμούς που έχουν ως ψηφία ένα πεντάρι, ένα δυάρι, ένα οκτάρι και ένα εννιάρι.
- 17.** Να βρείτε πόσοι είναι όλοι οι τετραψήφιοι αριθμοί.
- 18.** Αν ο n είναι φυσικός αριθμός διαφορετικός του μηδενός, να γράψετε:
α) τον επόμενό του, **β)** τον προηγούμενό του και
γ) τον επόμενο του επομένου του.
- 19.** Ποιοι είναι οι φυσικοί αριθμοί που, αν τους στρογγυλοποιήσουμε στην πλησιέστερη δεκάδα, παίρνουμε τον αριθμό 250;
- 20.** Να βρεθούν οι φυσικοί αριθμοί που, αν τους στρογγυλοποιήσουμε στην πλησιέστερη εκατοντάδα, παίρνουμε τον αριθμό 700.
- 21.** Να βρείτε τους τετραψήφιους αριθμούς που είναι μικρότεροι του 10.000 και που η στρογγυλοποίησή τους στην πλησιέστερη χιλιάδα είναι 10.000.
- 22.** Να συμπληρωθεί το κενό με το κατάλληλο ψηφίο, ώστε ο αριθμός 1.7_7, όταν στρογγυλοποιηθεί στην πλησιέστερη δεκάδα, να γίνει 1.760.
- 23.** Ένας φυσικός αριθμός στρογγυλοποιείται στην πλησιέστερη δεκάδα. Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο, αν με τη στρογγυλοποίηση:
α) μικραίνει κατά 2, **β)** μεγαλώνει κατά 3.
- 24.** Να εξετάσετε σε ποιες περιπτώσεις δε γίνεται στρογγυλοποίηση:
α) στον ταχυδρομικό κώδικα μιας περιοχής,
β) στον τηλεφωνικό αριθμό του σπιτιού σου,
γ) στην τιμή ενός προϊόντος,
δ) στον αριθμό της διεύθυνσής σου,
ε) στο πλήθος των μαθητών ενός σχολείου.

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ



Απαντήσεις συμπλήρωσης: 1. <, >, <, 2. =, 3. 7.160, 7.200, 4. 586, 5. 3.

1. Τέσσερις χιλιάδες και εννιακόσια τρία, δεκατρείς χιλιάδες διακόσια εννέα, εκατόν είκοσι τρία εκατομμύρια τετρακόσιες πενήντα έξι χιλιάδες και επτακόσια ογδόντα εννέα.
2. α) 1.806, β) 725, γ) 8.032, δ) 2.010.378.
3. α) Εκατοντάδες, β) χιλιάδες, γ) δεκάδες, δ) μονάδες, ε) δεκάδες εκατομμύρια.
4. 126, 128, 130, 132, 134, 136, 138, 140.
5. 563, 565, 567, 569, 571, 573, 575, 577, 579.
6. α) Δευτέρα, β) Τετάρτη, γ) Πέμπτη.
7. 4.
8. 264.
9. 5.
10. 583.
11. α) $789 < 798 < 879 < 897 < 978 < 987$, β) $210 > 201 > 120 > 102 > 21 > 12$.
12. Το Β είναι το 2, το Γ είναι το 5 και το Δ είναι το 9.
13. α) 900, β) 31.500, γ) 87.900, δ) 1.000.
14. α) 12.702.940, β) 12.702.900, γ) 12.700.000, δ) 13.000.000.
15.

	Χιλιάδα	Εκατοντάδα	Δεκάδα
12.345	12.000	12.300	12.350
3.451	3.000	3.500	3.450
908.615	909.000	908.600	908.620
70.002	70.000	70.000	70.000
16. 2.589, 2.598, 2.859, 2.895, 2.958, 2.985, 5.289, 5.298, 5.829, 5.892, 5.982, 5.928, 8.259, 8.295, 8.529, 8.592, 8.925, 8.952, 9.258, 9.285, 9.528, 9.582, 9.825, 9.852.
17. 9.000.
18. α) $v + 1$, β) $v - 1$, γ) $v + 1 + 1 = v + 2$.
19. 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254.
20. 650, 651, ..., 749.
21. 9.500, 9.501, ..., 9.999.
22. 1.757.
23. α) 2, β) 7.
24. α, β, δ.

Πρόσθεση

Ορισμός

Πρόσθεση είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς α και β , που λέγονται **προσθετέοι**, βρίσκουμε έναν τρίτο αριθμό γ , που είναι το **άθροισμά** τους, δηλαδή $\alpha + \beta = \gamma$.

⚠ Παρατήρηση

Για να προσθέσουμε κάθετα φυσικούς αριθμούς, βάζουμε τις μονάδες κάτω από τις μονάδες, τις δεκάδες κάτω από τις δεκάδες κτλ., ώστε τα ψηφία της κάθε τάξης να είναι στην ίδια στήλη. Αυτό σημαίνει ότι «στοιχίζουμε» τους προσθετέους από δεξιά.

<i>Παράδειγμα</i>	
95.792	95.792
1.209	1.209
+ 652	+ 652
97.653	173.082

Ιδιότητες της πρόσθεσης

- Το 0, όταν προστεθεί σε ένα φυσικό αριθμό, δεν τον μεταβάλλει.
Το 0 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**. $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$
- Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των δύο προσθετέων ενός αθροίσματος.
Η ιδιότητα αυτή λέγεται **αντιμεταθετική ιδιότητα**. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- Μπορούμε να αντικαθιστούμε προσθετέους με το άθροισμά τους ή να αναλύουμε έναν προσθετέο σε άθροισμα.
Η ιδιότητα αυτή λέγεται **προσεταιριστική ιδιότητα**. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

Αφαίρεση

Ορισμός

Αφαίρεση είναι η πράξη με την οποία, όταν δοθούν δύο αριθμοί, ο **μειωτέος** (M) και ο **αφαιρετέος** (A), βρίσκουμε τη **διαφορά** τους (Δ), δηλαδή $M - A = \Delta$, αφού $A + \Delta = M$.

⚠ Παρατηρήσεις

- 1 Στην αφαίρεση φυσικών αριθμών ο αφαιρετέος (A) πρέπει να είναι πάντα μικρότερος ή ίσος του μειωτέου (M), αλλιώς η πράξη δεν μπορεί να γίνει.

➡ Παραδείγματα

$$123 - 99 = 24, \text{ ενώ } 99 - 123 = ; ; ;$$

- 2 Για να αφαιρέσουμε κάθετα δύο φυσικούς αριθμούς, βάζουμε επάνω το μειωτέο, από κάτω τον αφαιρετέο και τις μονάδες κάτω από τις μονάδες, τις δεκάδες κάτω από τις δεκάδες κτλ., ώστε τα ψηφία της κάθε τάξης να είναι στην ίδια στήλη.
- 3 Η αφαίρεση είναι η αντίθετη πράξη της πρόσθεσης και ως εκ τούτου η πρόσθεση είναι η επαλήθευση της αφαίρεσης. Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\Delta = M - A$$

ή

$$M = A + \Delta$$

ή

$$A = M - \Delta$$

Πολλαπλασιασμός

Ορισμός

Πολλαπλασιασμός είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς α και β , που λέγονται **παράγοντες**, βρίσκουμε έναν τρίτο φυσικό αριθμό γ , που είναι το **γινόμενο** τους, δηλαδή $\alpha \cdot \beta = \gamma$.

⚠ Παρατήρηση

Το γινόμενο $3 \cdot 4$ διαβάζεται «3 φορές το 4» και γράφουμε: $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$.

Ομοίως, αν έχουμε μεταβλητές:

$$\alpha + \alpha + \alpha = 3 \cdot \alpha = 3\alpha, \quad x + x + x + x + x = 5 \cdot x = 5x, \quad \beta = 1 \cdot \beta, \quad 0 \cdot \gamma = 0.$$

Προσέξτε ότι στο γινόμενο αριθμού με μεταβλητή ή μεταξύ μεταβλητών το επί (\cdot) μπορεί να παραληφθεί, κάτι το οποίο δεν μπορεί να συμβεί ανάμεσα σε αριθμούς!!!

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού

- Το 1, όταν πολλαπλασιαστεί με ένα φυσικό αριθμό, δεν τον μεταβάλλει.
Το 1 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**. $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$
- Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των παραγόντων ενός γινομένου.
Η ιδιότητα αυτή λέγεται **αντιμεταθετική ιδιότητα**. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
- Μπορούμε να αντικαθιστούμε παράγοντες με το γινόμενό τους ή να αναλύουμε έναν παράγοντα σε γινόμενο.
Η ιδιότητα αυτή λέγεται **προσεταιριστική ιδιότητα**. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

- Το γινόμενο οποιουδήποτε αριθμού με το μηδέν κάνει πάντα μηδέν.

Το 0 λέγεται **απορροφητικό στοιχείο**.

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

- **Επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση:**

Γεωμετρική απόδειξη

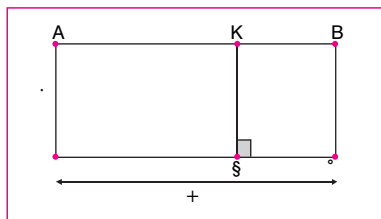
$$a \cdot (\beta + \gamma) = a \cdot \beta + a \cdot \gamma$$

Θεωρούμε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις $AD = a$, $AB = \beta + \gamma$ και εμβαδόν $E_{AB\Gamma\Delta} = a \cdot (\beta + \gamma)$.

Παίρνουμε σημείο Κ στην ΑΒ ώστε $AK = \beta$, οπότε $KB = \gamma$, και φέρνουμε $ΚΛ \parallel AD \parallel ΒΓ$.

Δημιουργούμε έτσι δύο νέα ορθογώνια, τα ΑΚΛΔ και ΚΒΓΛ, διαστάσεων a , β και a , γ αντίστοιχα, με εμβαδά $E_{AK\Lambda\Delta} = a \cdot \beta$ και $E_{K\beta\Gamma\Lambda} = a \cdot \gamma$.

Αφού $E_{AB\Gamma\Delta} = E_{AK\Lambda\Delta} + E_{K\beta\Gamma\Lambda}$, έχουμε: $a \cdot (\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma$.



- **Επιμεριστική ιδιότητα ως προς την αφαίρεση:**

Γεωμετρική απόδειξη

$$a \cdot (\beta - \gamma) = a \cdot \beta - a \cdot \gamma$$

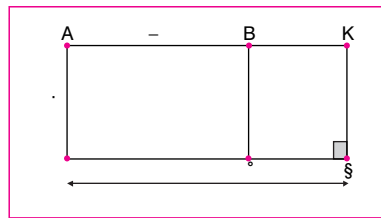
Θεωρούμε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις $AD = a$, $AB = \beta - \gamma$ ($\beta > \gamma$) και εμβαδόν $E_{AB\Gamma\Delta} = a \cdot (\beta - \gamma)$.

Προεκτείνουμε την ΑΒ προς το Β και παίρνουμε σημείο Κ ώστε $BK = \gamma$,

οπότε $AK = \beta - \gamma + \gamma = \beta$, και φέρνουμε $ΚΛ \parallel AD \parallel ΒΓ$.

Δημιουργούμε έτσι δύο νέα ορθογώνια, τα ΑΚΛΔ και ΚΒΓΛ, διαστάσεων a , β και a , γ αντίστοιχα, με εμβαδά $E_{AK\Lambda\Delta} = a \cdot \beta$ και $E_{K\beta\Gamma\Lambda} = a \cdot \gamma$.

Αφού $E_{AB\Gamma\Delta} = E_{AK\Lambda\Delta} - E_{K\beta\Gamma\Lambda}$, έχουμε: $a \cdot (\beta - \gamma) = a\beta - a\gamma$.



⚠ Παρατήρηση

Όταν πολλαπλασιάζουμε ένα φυσικό με 10, 100, 1.000 κτλ., γράφουμε στο τέλος του αριθμού τόσα μηδενικά όσα και τα μηδενικά του παράγοντα 10, 100, 1.000, ...

➡ Παραδείγματα

$$1.587 \cdot 10 = 15.870, 1.587 \cdot 100 = 158.700, 1.587 \cdot 1.000 = 1.587.000.$$

Προτεραιότητα των πράξεων

Αν μας ζητούν να βρούμε ένα αριθμητικό αποτέλεσμα, η σειρά με την οποία θα κάνουμε τις πράξεις (που είδαμε μέχρι στιγμής) είναι:

- 1 Οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις, όπου πρώτα κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και μετά προσθέσεις, αφαιρέσεις από αριστερά προς τα δεξιά.
- 2 Πολλαπλασιασμοί.
- 3 Προσθέσεις και αφαιρέσεις από αριστερά προς τα δεξιά.

➔ Παράδειγμα

$$\begin{aligned} & 19 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot (11 \cdot 12 + 6 - 15 \cdot 9) + 12 \cdot 7 - 5 = \\ & = 19 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot (132 + 6 - 135) + 12 \cdot 7 - 5 = \quad \text{[πολλαπλασιασμοί στις παρενθέσεις]} \\ & = 19 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot (138 - 135) + 12 \cdot 7 - 5 = \quad \text{[προσθέσεις και αφαιρέσεις στις παρενθέσεις]} \\ & = 19 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 12 \cdot 7 - 5 = \quad \text{[πολλαπλασιασμοί]} \\ & = \underline{19 - 12} + 6 + 84 - 5 = \\ & = \underline{7 + 6} + 84 - 5 = \underline{13 + 84} - 5 = 97 - 5 = 92. \quad \text{[προσθέσεις και αφαιρέσεις από αριστερά προς τα δεξιά]} \end{aligned}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Διάβασες προσεκτικά τη θεωρία;



Α' ΜΟΡΦΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΠΡΑΞΕΙΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1 Να γίνουν οι πράξεις: α) $8.902 + 345 + 3.867$, β) $23.023 - 9.876$, γ) $784 \cdot 32$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{array}{r} \text{α)} \quad 8.902 \\ \quad \quad 345 \\ \hline + 3.867 \\ \hline 13.114 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{β)} \quad 23.023 \\ \quad \quad - 9.876 \\ \hline 13.147 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{γ)} \quad \quad 784 \\ \quad \quad \times 32 \\ \hline \quad \quad 1568 \\ + 2352 \\ \hline 25.088 \end{array}$$

2 Να συμπληρώσετε τα κενά με τους κατάλληλους αριθμούς, ώστε να προκύψουν σωστές πράξεις.

$$\begin{array}{r} \text{α)} \quad \square.5\square7 \\ \quad \quad + 89\square \\ \hline 5.\square61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{β)} \quad 9\square.73\square \\ \quad \quad - 2.9\square6 \\ \hline \square7.\square89 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{γ)} \quad \quad 7\square4 \\ \quad \quad \times 89 \\ \hline \quad \quad \square87\square \\ + 6112 \\ \hline \end{array}$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{array}{r} \text{α)} \quad 4.567 \\ \quad \quad + 894 \\ \hline 5.461 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{β)} \quad 90.735 \\ \quad \quad - 2.946 \\ \hline 87.789 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{γ)} \quad \quad 764 \\ \quad \quad \times 89 \\ \hline \quad \quad 6876 \\ + 6112 \\ \hline 67.996 \end{array}$$

- 3** Να κάνετε τις πράξεις: α) $123 - 67 + 48$, β) $123 - 67 - 48$,
 γ) $123 - (67 - 48)$, δ) $123 - (67 + 48)$, ε) $893 - 672 + 308 - 86 - 253$.

ΛΥΣΗ

α) $123 - 67 + 48 = 56 + 48 = 104$.
 β) $123 - 67 - 48 = 56 - 48 = 8$.
 γ) $123 - (67 - 48) = 123 - 19 = 104$.
 δ) $123 - (67 + 48) = 123 - 115 = 8$.
 ε) $893 - 672 + 308 - 86 - 253 =$
 $= 221 + 308 - 86 - 253 =$
 $= 529 - 86 - 253 = 443 - 253 = 190$.

Κάνουμε πρώτα τις πράξεις στις παρενθέσεις και μετά τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις από αριστερά προς τα δεξιά.

- 4** Να κάνετε με δύο τρόπους τις πράξεις: α) $509 - 45 - 51$, β) $967 - 95 - 86$.

ΛΥΣΗ

α) 1ος τρόπος: $509 - 45 - 51 = 464 - 51 = 413$.
2ος τρόπος: $509 - 45 - 51 = 509 - (45 + 51) = 509 - 96 = 413$.
 β) 1ος τρόπος: $967 - 95 - 86 = 872 - 86 = 786$.
2ος τρόπος: $967 - 95 - 86 = 967 - (95 + 86) = 967 - 181 = 786$.

$a - b - c = a - (b + c)$.

- 5** Να βρείτε τα ακόλουθα αποτελέσματα: $A = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 7 - 4 - 6 \cdot 4$,
 $B = 12 \cdot 34 - 19 \cdot 7 + 85 - 11 \cdot 13$, $\Gamma = 3 \cdot (12 \cdot 9 - 8 - 5 \cdot 9) + 11 \cdot 7 - 15 \cdot 12$.

ΛΥΣΗ

$A = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 7 - 4 - 6 \cdot 4 = 12 + 35 - 4 - 24 =$ [πολλαπλασιασμοί]
 $= 47 - 4 - 24 = 43 - 24 = 19$. [προσθέσεις, αφαιρέσεις από αριστερά προς τα δεξιά]
 $B = 12 \cdot 34 - 19 \cdot 7 + 85 - 11 \cdot 13 =$ [πολλαπλασιασμοί]
 $= 408 - 133 + 85 - 143 =$ [προσθέσεις, αφαιρέσεις από αριστερά προς τα δεξιά]
 $= 275 + 85 - 143 = 360 - 143 = 217$.
 $\Gamma = 3 \cdot (12 \cdot 9 - 8 - 5 \cdot 9) + 11 \cdot 7 - 15 \cdot 12 =$
 $= 3 \cdot (108 - 8 - 45) + 11 \cdot 7 - 15 \cdot 12 =$ [πολλαπλασιασμοί στις παρενθέσεις]
 $= 3 \cdot (100 - 45) + 11 \cdot 7 - 15 \cdot 12 =$ [προσθέσεις και αφαιρέσεις στις παρενθέσεις]
 $= 3 \cdot 55 + 11 \cdot 7 - 15 \cdot 12 = 165 + 77 - 180 =$ [πολλαπλασιασμοί]
 $= 242 - 180 = 62$. [προσθέσεις, αφαιρέσεις από αριστερά προς τα δεξιά]

Β' ΜΟΡΦΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

- 6** Αν $a = 396$, $\beta = 597$, να υπολογίσετε τα αποτελέσματα:
 α) $a + \beta$, β) $\beta - a$, γ) $a - 98 + \beta$, δ) $a + 672 - 893 + \beta$.

ΛΥΣΗ

α) $a + \beta = 396 + 597 = 993$.

β) $\beta - \alpha = 597 - 396 = 201$.

γ) $a - 98 + \beta = 396 - 98 + 597 = 298 + 597 = 895$.

δ) $a + 672 - 893 + \beta = 396 + 672 - 893 + 597 = 1.068 - 893 + 597 = 175 + 597 = 772$.

7 Αν $a + \beta = 17$ και $\beta + \gamma = 15$, να υπολογίσετε τα αποτελέσματα:

α) $a + \beta - 11$, β) $a + 2 + \beta$, γ) $\beta + a + \gamma + \beta$, δ) $\beta - 13 + \gamma + 7$.

ΛΥΣΗ

α) $a + \beta - 11 = 17 - 11 = 6$.

β) $a + 2 + \beta = a + \beta + 2 = 17 + 2 = 19$.

γ) $\beta + a + \gamma + \beta = a + \beta + \beta + \gamma = 17 + 15 = 32$.

δ) $\beta - 13 + \gamma + 7 = \beta + \gamma - 13 + 7 = 15 - 13 + 7 = 2 + 7 = 9$.

Δεν αντικαθιστούμε συγκεκριμένες τιμές στα a, β, γ .
Δε βάζουμε, για παράδειγμα, $a = 10, \beta = 7, \gamma = 8!!!$

8 Να βρεθεί ποιος αριθμός μπορεί να πάρει τη θέση του x , ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες: α) $x + 49 = 92$, β) $627 - x = 491$.

ΛΥΣΗ

α) Στην ισότητα $x + 49 = 92$ θεωρούμε $A = x, \Delta = 49$ και $M = 92$, για να ισχύει $A + \Delta = M$, οπότε, αφού $A = M - \Delta$, έχουμε ότι:
 $x = 92 - 49 = 43$.

β) Στην ισότητα $627 - x = 491$ θεωρούμε $M = 627, A = x$ και $\Delta = 491$, για να ισχύει $M - A = \Delta$, οπότε, αφού $A = M - \Delta$, έχουμε ότι:
 $x = 627 - 491 = 136$.

$$\begin{aligned} \Delta &= M - A \\ &\text{ή} \\ M &= A + \Delta \\ &\text{ή} \\ A &= M - \Delta \end{aligned}$$

Γ' ΜΟΡΦΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗΣ ΙΔΙΟΤΗΤΑΣ

Μέθοδος

Χρησιμοποιούμε τις $a \cdot (\beta \pm \gamma) = a\beta \pm a\gamma$ ξεκινώντας από το μέλος της επιμεριστικής ιδιότητας που μας εξυπηρετεί καλύτερα.

9 Να γράψετε πιο σύντομα τις ακόλουθες παραστάσεις:

α) $x + x + x + x$, β) $y + y + 5y - 3y$, γ) $a\beta + a\beta + a\beta + a\beta + a\beta + a\beta$.