

Δημήτρης Διαμαντίδης, Γεωργία Ευθυμίου,
Αναστάσιος Κουπετώρης, Ιωάννης Σταμπόλας

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

Β΄ ΤΟΜΟΣ



Θέση υπογραφής δικαιούχου δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας,
εφόσον η υπογραφή προβλέπεται από τη σύμβαση.

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις της ελληνικής νομοθεσίας (Ν. 2121/1993, όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής αδείας του εκδότη κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο (ηλεκτρονικό, μηχανικό ή άλλο) αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή και η εν γένει εκμετάλλευσή του συνόλου ή μέρους του έργου.

Εκδόσεις Πατάκη – Εκπαίδευση

Δημήτρης Διαμαντίδης, Γεωργία Ευθυμίου, Αναστάσιος Κουπετώρης, Ιωάννης Σταμπόλας,
Άλγεβρα Α΄ Λυκείου, β΄ τόμος

Διορθώσεις: Νάντια Κουτσοουρούμπα

Υπεύθυνος έκδοσης: Βαγγέλης Μπακλαβάς

DTP: Γιώργος Χατζησπύρος

Φίλμ – μοντάζ: Μαρία Ποινιού-Ρένεση

Copyright © Σ. Πατάκης ΑΕΕΔΕ (Εκδόσεις Πατάκη), Δ. Διαμαντίδης, Γ. Ευθυμίου,
Α. Κουπετώρης και Ι. Σταμπόλας, Αθήνα, 2014

Πρώτη έκδοση από τις Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα, Ιανουάριος 2015

Κ.Ε.Τ. 8779 – Κ.Ε.Π. 01/15

ISBN (set.) 978-960-16-5254-2

ISBN (vol. 2) 978-960-16-5250-4



**ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΠΑΤΑΚΗ**

ΠΑΝΑΓΗ ΤΣΑΛΔΑΡΗ (ΠΡΩΗΝ ΠΕΙΡΑΙΩΣ) 38, 104 37 ΑΘΗΝΑ,

ΤΗΛ.: 210.36.50.000, 210.52.05.600, 801.100.2665, ΦΑΞ: 210.36.50.069

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ: ΕΜΜ. ΜΠΕΝΑΚΗ 16, 106 78 ΑΘΗΝΑ, ΤΗΛ.: 210.38.31.078

ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΗΜΑ ΒΟΡΕΙΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ: ΚΟΡΥΤΣΑΣ (ΤΕΡΜΑ ΠΟΝΤΟΥ – ΠΕΡΙΟΧΗ Β΄ ΚΤΕΟ),

570 09 ΚΑΛΟΧΩΡΙ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ, Τ.Θ. 1213, ΤΗΛ.: 2310.70.63.54, 2310.70.67.15, ΦΑΞ: 2310.70.63.55

Web site: <http://www.patakis.gr> • e-mail: info@patakis.gr, sales@patakis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

16. Ανισώσεις 1ου βαθμού	7
Επίλυση ανίσωσης – Επίλυση συστήματος ανισώσεων	9
Παραμετρικές ανισώσεις	18
Σύνθετες ανισώσεις (με απόλυτα και ρίζες)	22
Γενικές Ασκήσεις	30
Φύλλο εργασίας στις ανισώσεις 2ου βαθμού	32
17. Ανισώσεις 2ου βαθμού	35
Μορφές τριωνύμου – Πρόσημο τριωνύμου	39
Επίλυση ανισώσεων 2ου βαθμού	46
Συνθήκες δευτεροβάθμιων παραμετρικών εξισώσεων και ανισώσεων	52
Γενικές Ασκήσεις	59
8ο Κριτήριο Αξιολόγησης	61
18. Ανισώσεις γινόμενο και ανισώσεις πηλίκο	62
Πρόσημο γινομένου-πηλίκου – Ανισώσεις γινόμενο και ανισώσεις πηλίκο	65
19. Επαναληπτικές Ασκήσεις	75
3ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα	81
Φύλλο εργασίας στις ακολουθίες	82
20. Ακολουθίες	85
Υπολογισμός n -οστού ($n \in \mathbb{N}^*$) όρου ακολουθίας – Εύρεση αναδρομικού τύπου από τον γενικό όρο – Εύρεση γενικού όρου από τον αναδρομικό τύπο	88
21. Αριθμητική πρόοδος	96
Εύρεση στοιχείων αριθμητικής προόδου (Α.Π.)	98
Απόδειξη ότι μία ακολουθία είναι Α.Π.	108
Αριθμητικός μέσος – Διαδοχικοί όροι Α.Π. (δ.ό.Α.Π.)	111
Αριθμητική παρεμβολή	118
Προβλήματα	120
Γενικές Ασκήσεις	123
22. Γεωμετρική πρόοδος	124
Εύρεση στοιχείων γεωμετρικής προόδου (Γ.Π.)	126
Απόδειξη ότι μία ακολουθία είναι Γ.Π.	134
Διαδοχικοί όροι Γ.Π. (δ.ό.Γ.Π.)	137
Γεωμετρική παρεμβολή	145
Ανατοκισμός	147
Προβλήματα	151
Γενικές Ασκήσεις	153

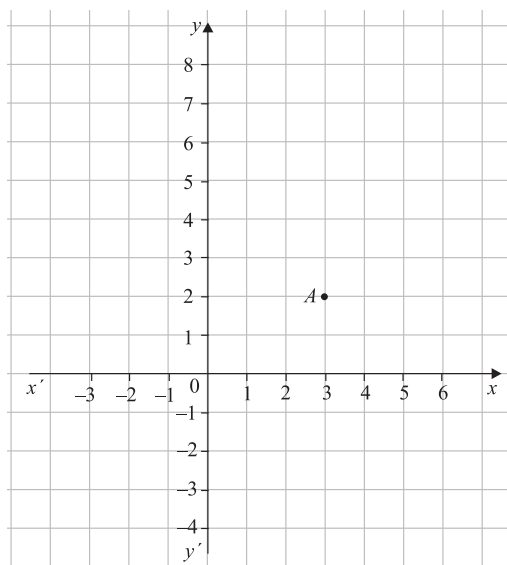
23. Επαναληπτικές Ασκήσεις	155
4ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα	158
24. Η έννοια της συνάρτησης	160
Πεδίο ορισμού συνάρτησης	165
Εύρεση τιμών συνάρτησης – Σύνολο τιμών	174
Προβλήματα	183
Γενικές Ασκήσεις	185
9ο Κριτήριο Αξιολόγησης	189
Φύλλο εργασίας στις καρτεσιανές συντεταγμένες και στη γραφική παράσταση συνάρτησης	191
25. Καρτεσιανές συντεταγμένες	195
Καρτεσιανές συντεταγμένες	199
Αποστάσεις σημείου από άξονες και σημείου από σημείο – Κύκλος κέντρου $O(0, 0)$	204
Γενικές Ασκήσεις	214
10ο Κριτήριο Αξιολόγησης	216
26. Γραφική παράσταση συνάρτησης	218
Σχετική θέση και σημεία τομής γραφικών παραστάσεων	220
Γενικές Ασκήσεις	239
11ο Κριτήριο Αξιολόγησης	240
Φύλλο εργασίας στην ευθεία	242
27. Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$	245
Ο ρόλος των παραμέτρων a και β της ευθείας $y = ax + \beta$	248
Γραφική παράσταση ευθείας	255
Σχετική θέση δύο ευθειών	265
Εύρεση τύπου ευθείας	272
Γενικές Ασκήσεις	282
12ο Κριτήριο Αξιολόγησης	287
Φύλλο εργασίας στην $f(x) = ax^2$	289
28. Μελέτη των συναρτήσεων $f(x) = ax^2$ και $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, με $a \neq 0$	293
Η συνάρτηση $f(x) = ax^2$ και οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = a(x - p)^2 + q$...	304
Σύνδεση του τύπου της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$, με τη γραφική της αναπαράσταση	318
Άλλες συναρτήσεις	333
Γενικές Ασκήσεις	346
29. Επαναληπτικές Ασκήσεις	348

Γενικές Επαναληπτικές Ασκήσεις	359
Σύνθετα θέματα – Προσομοίωση τράπεζας	381
Τεστ Σωστού – Λάθους	397
1ο Τεστ Σωστού – Λάθους	399
2ο Τεστ Σωστού – Λάθους	402
3ο Τεστ Σωστού – Λάθους	405
4ο Τεστ Σωστού – Λάθους	408
5ο Τεστ Σωστού – Λάθους	411
6ο Τεστ Σωστού – Λάθους	416
Απαντήσεις Τεστ Σωστού – Λάθους	418
Παράρτημα Α: Αποδείξεις θεωρημάτων και προτάσεων σχολικού βιβλίου	419
Ενδεικτικές Λύσεις – Απαντήσεις	425
Λύσεις των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου	559
Τυπολόγιο	608

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

- 1) Έστω το σημείο $A(3, 2)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Να βρείτε τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου που προκύπτουν, αν ξεκινώντας κάθε φορά από το σημείο A προχωρήσουμε κ βήματα (μονάδες) παράλληλα με τον άξονα $x'x$ και στη συνέχεια 2κ παράλληλα με τον άξονα $y'y$, για $\kappa = 1, 2, 3, -1, -2$, και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα. (Όταν τα κ και 2κ είναι θετικά, εννοείται ότι προχωράμε κατά τη θετική φορά των αξόνων, κι όταν είναι αρνητικά, κατά την αρνητική φορά.)



Βήματα κ	Τετμημένη x του σημείου που προκύπτει μετά από κ βήματα	Τεταγμένη y του σημείου που προκύπτει μετά από κ βήματα	$\frac{y-2}{x-3}$
1			
2			
3			
-1			
-2			
-3			

Μπορείτε να υποθέσετε σε τι είδους γραμμή θα βρίσκονται όλα τα σημεία που μπορεί να προκύψουν με αυτή τη διαδικασία;

Απ.:

- 2) Έστω το σημείο $A(2, 1)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες που αφορούν τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου που προκύπτουν αν ξεκινώντας από το σημείο A προχωρήσουμε κ βήματα παράλληλα με τον άξονα $x'x$ και $\alpha\kappa$ βήματα παράλληλα με τον άξονα $y'y$ για τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ που δίνονται. (Όταν τα κ και $\alpha\kappa$ είναι θετικά, εννοείται ότι προχωράμε κατά τη θετική φορά των αξόνων, κι όταν είναι αρνητικά, κατά την αρνητική φορά.)

$a = 1$			
κ	x	y	$\frac{y-1}{x-2}$
1			
2			
-1			
-2			
3			
5			
-4			

$a = \frac{1}{2}$			
κ	x	y	$\frac{y-1}{x-2}$
1			
2			
-1			
-2			
3			
5			
-4			

$a = -2$			
κ	x	y	$\frac{y-1}{x-2}$
1			
2			
-1			
-2			
3			
5			
-4			

3) Λαμβάνοντας υπόψη τους πίνακες του ερωτήματος (2), να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα απαντώντας στις παρακάτω ερωτήσεις:

a	Ερώτηση (α)	Ερώτηση (β)	Ερώτηση (γ)
1			
$\frac{1}{2}$			
-2			

α) Παρατηρώντας την τελευταία στήλη κάθε πίνακα του ερωτήματος (2), μπορείτε να διατυπώσετε κάποια σχέση που να συνδέει τις συντεταγμένες x και y του σημείου M ;

β) Ποια είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της γραμμής με τον άξονα $y'y$;

γ) Να λύσετε τη σχέση του ερωτήματος (α) ως προς y .

Πώς συνδέεται το αποτέλεσμα του ερωτήματος (γ) με την τεταγμένη του σημείου τομής με τον άξονα $y'y$ και με τον a ;

Απ.:

Τον αριθμό a τον ονομάζουμε **συντελεστή διεύθυνσης ή κλίση της ευθείας**.

4) Ποια σχέση συνδέει τις συντεταγμένες των σημείων $A(x, y)$ μιας ευθείας που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης a ;

Απ.:

5) Έστω τα σημεία $A(2, 1)$ και $B(3, 2)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

α) Ποιος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης που διέρχεται από τα σημεία A και B ;

Απ.:

β) Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του σημείου B στη σχέση $y = ax + \beta$, να βρείτε τον β .

Απ.:

γ) Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A, B ;

Απ.:

Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$

Έστω (ε) μια ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A .

ΟΡΙΣΜΟΣ

Γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$ λέμε τη γωνία που διαγράφει η ημιευθεία Ax μέχρι να συμπίψει με την ευθεία (ε) , όταν η ημιευθεία αυτή στραφεί κατά τη θετική φορά.

Θετική φορά ορίζουμε τη φορά περιστροφής που είναι αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού.

Αν μια ευθεία είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$ ή συμπίπτει με αυτόν, λέμε ότι σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 0^\circ$.

Για τη γωνία ω που σχηματίζει μια ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$ ισχύει $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$ ή $0 \leq \omega < \pi$.

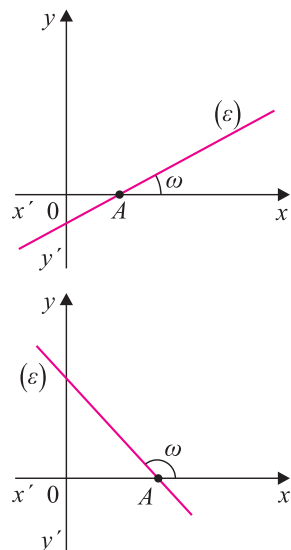
Κλίση ή συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας ονομάζουμε τον αριθμό $\lambda = \varepsilon\omega$.

- Αν $\lambda > 0$, τότε $0^\circ < \omega < 90^\circ$.
- Αν $\lambda < 0$, τότε $90^\circ < \omega < 180^\circ$.
- Αν $\lambda = 0$, τότε $\omega = 0^\circ$ και η ευθεία είναι παράλληλη ή συμπίπτει με τον άξονα $x'x$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$ είναι ευθεία, έστω (ε) , η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, \beta)$ και έχει κλίση $\lambda = a$.

Ένα σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου είναι σημείο της ευθείας (ε) αν και μόνο αν $y = f(x) \Leftrightarrow y = ax + \beta$. Από δω και στο εξής η εξίσωση $y = ax + \beta$ θα ονομάζεται εξίσωση της ευθείας (ε) .

Αν ω είναι η γωνία της ευθείας $y = ax + \beta$ με τον άξονα $x'x$, ισχύει $\varepsilon\omega = a$.



Αν γνωρίζουμε δύο σημεία της ευθείας $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$, τότε η κλίση της είναι $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Πράγματι, αν $y = ax + \beta$ είναι η εξίσωση της ευθείας, τότε ισχύει $y_1 = ax_1 + \beta$ και $y_2 = ax_2 + \beta$. Αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \Leftrightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Αν $\beta = 0$, η συνάρτηση f παίρνει τη μορφή $f(x) = ax$ και η γραφική της παράσταση $y = ax$ περνάει από την αρχή των αξόνων. Ειδικότερα:

- Αν $a = 1$, τότε η ευθεία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$ και είναι η διχοτόμος των γωνιών xOy και $x'Oy'$.
- Αν $a = -1$, τότε η ευθεία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 135^\circ$ και είναι η διχοτόμος των γωνιών $x'Oy$ και $y'Ox$.

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

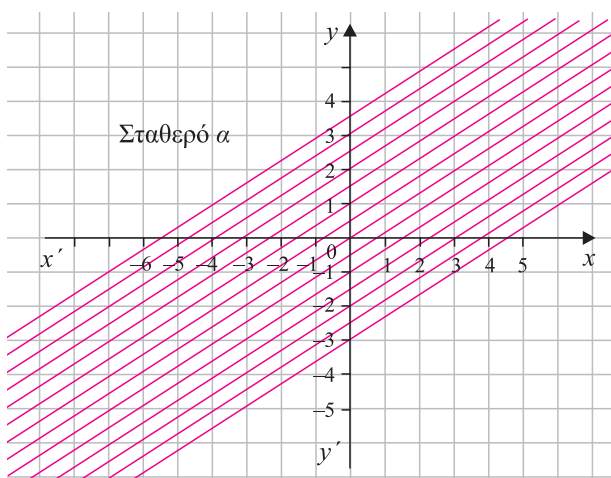
Έστω δύο ευθείες $\varepsilon_1 : y = a_1x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 : y = a_2x + \beta_2$ οι οποίες σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνίες ω_1 και ω_2 αντίστοιχα.

- Αν $a_1 = a_2$, τότε $\varepsilon\varphi\omega_1 = \varepsilon\varphi\omega_2$, οπότε $\omega_1 = \omega_2$.

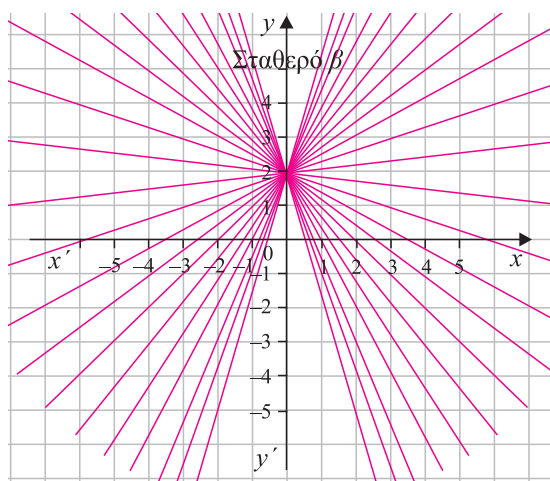
Στην περίπτωση αυτή, οι δύο ευθείες:

— είναι παράλληλες, αν $\beta_1 \neq \beta_2$,

— ταυτίζονται, αν $\beta_1 = \beta_2$.



- Αν $a_1 \neq a_2$, οι ευθείες τέμνονται. Ειδικότερα, αν $\beta_1 = \beta_2$, οι ευθείες τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.



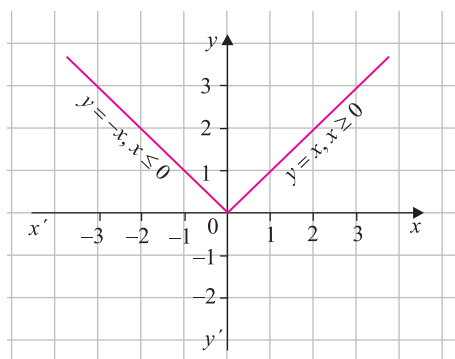
Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι ευθείες $y = ax + \beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$, είναι παράλληλες μεταξύ τους για a σταθερό και β μεταβλητό, ενώ διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο $(0, \beta)$ για β σταθερό και a μεταβλητό.

Η συνάρτηση $f(x) = |x|$

Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{αν } x < 0 \\ x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x|$ αποτελείται από τις ημιευθείες $y = -x$, με $x \leq 0$, και $y = x$, με $x \geq 0$.



Μ.1 Ο ρόλος των παραμέτρων a και β της ευθείας $y = ax + \beta$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1

- **[M.1.1]** Για τον συντελεστή διεύθυνσης a (κλίση της ευθείας) ισχύει ότι:
 - i. **[M.1.1.i]** όταν γνωρίζουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$, της ευθείας, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης προκύπτει από τον τύπο
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$
 - ii. **[M.1.1.ii]** όταν γνωρίζουμε τη γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία με τον θετικό ημιάξονα $x'x$ και ζητείται ο a ή, αντίστροφα, όταν γνωρίζουμε τον a και ζητείται η γωνία ω , χρησιμοποιούμε τη σχέση $a = \varepsilon\varphi\omega$. Υπενθυμίζουμε ότι:

ω	0°	30°	45°	60°	120°	135°	150°
$\varepsilon\varphi\omega$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

- iii. **[M.1.1.iii]** αν $a > 0$, τότε η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον θετικό ημιάξονα $x'x$ είναι οξεία, ενώ, αν $a < 0$, η γωνία αυτή είναι αμβλεία, και αντίστροφα. Η περίπτωση $a = 0$ αντιστοιχεί σε ευθεία της μορφής $y = \beta$ με γραφική παράσταση παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- **[M.1.2]** Ο σταθερός όρος β εκφράζει την τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας με τον άξονα $y'y$, δηλαδή η ευθεία διέρχεται πάντα από το σημείο $(0, \beta)$. Αν $\beta = 0$, η ευθεία περνάει από την αρχή των αξόνων.

η Λυμένα θέματα

27.1 Δίνονται τα σημεία $A(-1, 0)$, $B(\sqrt{3}, 4)$, $\Gamma(\sqrt{27}, -2)$, $\Delta(x^2, x+2)$. Να βρεθούν:

α. ο συντελεστής διεύθυνσης και το είδος της γωνίας ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία:

i. A, B , ii. B, Γ ,

β. ο $x \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και Δ :

i. να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία, ii. να έχει κλίση 2.

Λύση

[M.1.1.i, M.1.1.iii]

α. i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι:

$$\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 0}{\sqrt{3} - (-1)} = \frac{4}{\sqrt{3} + 1} = \frac{4(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{4(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3}^2 - 1^2} = 2(\sqrt{3} - 1) > 0$$

Άρα, αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον άξονα $x'x$, θα είναι $0^\circ < \omega < 90^\circ$, δηλαδή οξεία.

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $B\Gamma$ είναι:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = \frac{-2 - 4}{\sqrt{27} - \sqrt{3}} = \frac{-6}{\sqrt{9 \cdot 3} - \sqrt{3}} = \frac{-6}{3\sqrt{3} - \sqrt{3}} = \\ &= \frac{-6}{2\sqrt{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = -\sqrt{3} < 0 \end{aligned}$$

Άρα $90^\circ < \omega < 180^\circ$, δηλαδή η γωνία ω που σχηματίζει η $B\Gamma$ με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία.

[M.1.1.iii, M.1.1.ii]

β. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $A\Delta$ με τον άξονα $x'x$. Επειδή $x^2 + 1 \neq 0$, ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $A\Delta$ και είναι:

$$\alpha = \frac{y_\Delta - y_A}{x_\Delta - x_A} = \frac{x + 2 - 0}{x^2 - (-1)} = \frac{x + 2}{x^2 + 1}$$

i. Για να είναι η ω οξεία, πρέπει $\alpha > 0 \Leftrightarrow \frac{x + 2}{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

Άρα πρέπει $x \in (-2, +\infty)$.

ii. Για να έχει η $A\Delta$ κλίση ίση με 2, πρέπει:

$$\alpha = 2 \Leftrightarrow \frac{x + 2}{x^2 + 1} = 2 \Leftrightarrow x + 2 = 2x^2 + 2 \Leftrightarrow x(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ή } x = \frac{1}{2} \right)$$

27.2 Δίνονται οι ευθείες (ε) , (ζ) , (η) , (θ) , (ν) και (μ) με αντίστοιχες εξισώ-

σεις $y = 17x - 2$, $y = -2(x - 1) - 2$, $y + x = 0$, $y + 2 = \sqrt{3}x$, $y = \frac{2\sqrt{12}x - \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

και $y - 2x = 2(-x - 1)$.

- α.** Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης καθεμιάς από τις ευθείες και το είδος της γωνίας ω που σχηματίζει αυτή με τον άξονα $x'x$.
- β.** Ποιες από τις παραπάνω ευθείες:
- i.** διέρχονται από την αρχή των αξόνων;
 - ii.** τέμνουν τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -2)$;

Λύση

[M.1.1.iii]

α. Για την (ε) , $a = 17 > 0$, άρα η γωνία ω είναι οξεία.

Για τη (ζ) , $y = -2(x-1) - 2 \Leftrightarrow y = -2x + 2 - 2 \Leftrightarrow y = -2x$, άρα $a = -2 < 0$, επομένως η γωνία είναι αμβλεία.

Για την (η) , $y + x = 0 \Leftrightarrow y = -x$, άρα $a = -1 < 0$, επομένως η γωνία είναι αμβλεία.

Για τη (θ) , $y + 2 = \sqrt{3}x \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x - 2$, άρα $a = \sqrt{3} > 0$, επομένως η γωνία είναι οξεία.

$$\text{Για την } (v), y = \frac{2\sqrt{12}x - \sqrt{8}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow y = \frac{2\sqrt{12}}{\sqrt{2}}x - \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$y = 2\sqrt{\frac{12}{2}}x - \sqrt{4} \Leftrightarrow y = 2\sqrt{6}x - 2, \text{ άρα } a = 2\sqrt{6} > 0, \text{ δηλαδή η γωνία είναι οξεία.}$$

Για τη (μ) , $y - 2x = 2(-x-1) \Leftrightarrow y - 2x = -2x - 2 \Leftrightarrow y = -2$, άρα

$$a = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 0 \Leftrightarrow \omega = 0^\circ.$$

[M.1.2]

- β. i.** Όλες οι παραπάνω ευθείες είναι της μορφής $y = ax + \beta$. Από την αρχή των αξόνων διέρχονται όσες έχουν $\beta = 0$. Αυτό συμβαίνει μόνο με τις (ζ) και (η) .
- ii.** Τον άξονα $y'y$ τέμνουν στο $(0, -2)$ όσες από τις παραπάνω ευθείες έχουν $\beta = -2$, δηλαδή οι ευθείες (ε) , (θ) , (v) και (μ) .

27.3 Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (|\kappa - 1| - 3)x + \kappa^2 + \kappa - 2$. Να βρεθεί

ο $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία (ε) :

α. να έχει κλίση ίση με -2 ,

β. να έχει κλίση 0 και να μη συμπίπτει με τον $x'x$,

γ. να σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον οριζόντιο άξονα,

δ. να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° ,

ε. να περνάει από την αρχή των αξόνων, αλλά να μη συμπίπτει με τον άξονα $x'x$.

Λύση

[M.1.2]

α. Πρέπει $|\kappa - 1| - 3 = -2 \Leftrightarrow |\kappa - 1| = 1 \Leftrightarrow (\kappa - 1 = 1 \text{ ή } \kappa - 1 = -1) \Leftrightarrow (\kappa = 2 \text{ ή } \kappa = 0)$.

β. Για να έχει κλίση 0, πρέπει:

$$|\kappa - 1| - 3 = 0 \Leftrightarrow |\kappa - 1| = 3 \Leftrightarrow (\kappa - 1 = 3 \text{ ή } \kappa - 1 = -3) \Leftrightarrow (\kappa = 4 \text{ ή } \kappa = -2)$$

Επίσης, για να μη συμπίπτει η (ε) με τον $x'x$, πρέπει $\kappa^2 + \kappa - 2 \neq 0$. Λύνουμε την εξίσωση $\kappa^2 + \kappa - 2 = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - 1 + \kappa - 1 = 0 \Leftrightarrow (\kappa - 1)(\kappa + 1) + \kappa - 1 = 0 \Leftrightarrow (\kappa - 1)(\kappa + 2) = 0 \Leftrightarrow (\kappa = 1 \text{ ή } \kappa = -2)$. Άρα $\kappa \neq 1$ και $\kappa \neq -2$.

Τελικά, $\kappa = 4$.

[M.1.1.iii]

γ. Για να σχηματίζει η (ε) αμβλεία γωνία με τον οριζόντιο άξονα, πρέπει $\alpha < 0 \Leftrightarrow |\kappa - 1| - 3 < 0 \Leftrightarrow |\kappa - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < \kappa - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < \kappa < 4$. Άρα $\kappa \in (-2, 4)$.

[M.1.1.ii]

δ. Πρέπει $\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi 45^\circ \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow |\kappa - 1| - 3 = 1 \Leftrightarrow |\kappa - 1| = 4 \Leftrightarrow (\kappa - 1 = 4 \text{ ή } \kappa - 1 = -4) \Leftrightarrow (\kappa = 5 \text{ ή } \kappa = -3)$.

[M.1.2]

ε. Πρέπει η εξίσωση της (ε) να είναι της μορφής $y = ax$, με $a \neq 0$.

Άρα πρέπει $\kappa^2 + \kappa - 2 = 0 \Leftrightarrow (\kappa - 1)(\kappa + 2) = 0 \Leftrightarrow (\kappa = 1 \text{ ή } \kappa = -2)$ και από το ερώτημα (β) για $a \neq 0$ προκύπτει ότι $\kappa \neq 4$ και $\kappa \neq -2$. Τελικά, $\kappa = 1$.

Προτεινόμενες Ασκήσεις για λύση

27.4 Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης των παρακάτω ευθειών:

α. $y = -x + 5$	β. $y = \frac{2x}{3} - 1$
γ. $y = 2$	δ. $y = \frac{-x+1}{4}$
ε. $y = \frac{2-3x}{5}$	στ. $y = \frac{-1+\sqrt{3}x}{-\sqrt{3}}$
ζ. $y = \frac{\sqrt{12}x - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$	η. $y = \alpha^2 + \beta^2$

27.5 Ποιες από τις παρακάτω ευθείες διέρχονται από την αρχή των αξόνων;

(ε): $y = -\sqrt[4]{7}x$, (ζ): $y = 2 - 5x$,
 (η): $y = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}-1}$, (θ): $y = \frac{1-x}{2} - \frac{1}{2}$,
 (ι): $y = 3$, (κ): $y = 0$, (λ): $x = 0$, (μ): $x = 3$

27.6 Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ καθεμία από τις παρακάτω ευθείες:

α. $y = x + 3$	β. $y = \frac{-\sqrt{3}x - 1}{\sqrt{3}}$
γ. $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + 2$	δ. $y = -\sqrt{3}$
ε. $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	στ. $y = \frac{3x-1}{\sqrt{3}}$
ζ. $y = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{12}}x$	η. $y = \frac{-\sqrt{3}x-3}{3}$
θ. $y = \frac{3-3x}{\sqrt{3}}$	ι. $y = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}x}{1-\sqrt{2}} - 5$

27.7 Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης και το είδος της γωνίας που σχηματίζει

με τον άξονα $x'x$ η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία:

α. $A(-\sqrt{2}, -2)$ και $B(3\sqrt{2}, 6)$
β. $A(-\frac{13}{8}, \sqrt{12})$ και $B(\sqrt[4]{5}, 2\sqrt{3})$
γ. $A(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $B(-1, 1)$
δ. $A(\frac{6}{2\sqrt{3}}, 17^5)$ και $B(\frac{\sqrt{105}}{\sqrt{35}}, -5^{-3})$

27.8 Να συμπληρωθεί με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) ο παρακάτω πίνακας:

Εξίσωση ευθείας	Διέρχεται από το O	Τέμνει γ'γ στο -1	Τέμνει γ'γ στο 2	Σχηματίζει με $x'x$ οξεία γωνία	Σχηματίζει με $x'x$ αμβλεία γωνία
$(\epsilon_1): y = -\frac{2x}{3} + 2$					
$(\epsilon_2): y = 7x - 1$					
$(\epsilon_3): y = -5x$					
$(\epsilon_4): y = 2 - 11x$					
$(\epsilon_5): y = -3x - 1$					
$(\epsilon_6): y = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)$					
$(\epsilon_7): y = \frac{x}{2}$					