ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΣΤΑ ΡΕΥΣΤΑ

Α.

Μέγεθος	Συμβολισμός	Μονάδα
Μάζα	m	kg
Όγκος	V	m^3
Πυκνότητα	ρ	kg/m^3
Δύναμη	F	N
Εμβαδόν επιφάνειας	A	m^2
Πίεση	p	$Pa = N/m^2$
Ατμοσφαιρική πίεση	$p_{at} = 1Atm$	$1Atm = 10^5$ Pa
Υδροστατική πίεση	$p_{υδ.}$	$Pa = N/m^2$

Μέγεθος	Συμβολισμός	Μονάδα
Ταχύτητα	υ	m/s
Παροχή	Π	m^3/s
Κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου	$\frac{1}{2}ρυ^2$	J/m^3
Δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου	ρgy	J/m^3
Συντελεστής ιξώδους	η	$N{\cdot}s/m^2$
Απόσταση πλακών	ℓ	m

Β. ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{m}{V} \quad (1)$$

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{F}{A} \quad (2)$$

$$p_{at} = 1Atm = 10^5\ Pa \quad (3)$$

$$p_{υδ.} = \rho g h \quad (4)$$

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A\upsilon \quad (5)$$

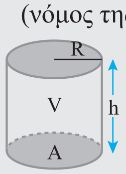
Εξίσωση συνέχειας $A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2$ ή $\Pi_1 = \Pi_2$ (6)

Εξίσωση Bernoulli $p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g y_2$ (7)

Θεώρημα Torricelli $\upsilon = \sqrt{2gh}$ (8)

Νευτώνεια υγρά $F = \eta A\frac{\upsilon}{\ell}$ (9)

Γ. ΧΡΗΣΙΜΑ ΣΧΟΛΙΑ

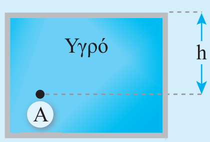
- Η πυκνότητα ενός ρευστού σε ένα σημείο του είναι $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$. Στην περίπτωση που ένα ρευστό είναι ασυμπίεστο, τότε $\rho = \frac{m}{V}$ = σταθ., δηλαδή η πυκνότητα είναι η ίδια σε όλη την έκτασή του.
- Η πίεση ενός ρευστού σε ένα σημείο του είναι $p = \frac{\Delta F}{\Delta A}$, με την $\Delta\vec{F}$ να ασκείται κάθετα στην επιφάνεια εμβαδού ΔΑ. Στην περίπτωση που η δύναμη μέτρου F ασκείται κάθετα σε όλα τα σημεία επίπεδης επιφάνειας εμβαδού Α, δηλαδή είναι ισοκατανεμημένη, είναι $p = \frac{F}{A}$.
- Η υδροστατική πίεση $p_{υδ.}$ σε δεδομένο βάθος h του υγρού εξαρτάται μόνο από το βάθος αυτού του σημείου και όχι από κάποια οριζόντια διάσταση του υγρού ή του δοχείου που το περιέχει. Η υδροστατική πίεση $p_{υδ.}$ σε ένα σημείο του υγρού είναι ανεξάρτητη από το σχήμα του δοχείου.
- Η εξίσωση $A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2$ ή $\Pi_1 = \Pi_2$ αποτελεί την εξίσωση της συνέχειας και ισχύει μόνο για ιδανικό ρευστό.
- Η εξίσωση $p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g y_2$ αποτελεί τον νόμο του Bernoulli και ισχύει μόνο για ιδανικό ρευστό.
  – Όταν ο σωλήνας είναι οριζόντιος, όπου δεν υπάρχει υψομετρική διαφορά, επειδή $y_1 = y_2 = 0$, η εξίσωση του Bernoulli παίρνει τη μορφή $p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$.
  – Όταν το ρευστό δεν κινείται, επειδή $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0$, η εξίσωση του Bernoulli παίρνει τη μορφή $p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2$ (νόμος της υδροστατικής).
- 

Το εμβαδόν κύκλου ακτίνας R και διαμέτρου δ είναι $A = \pi R^2 = \frac{\pi\delta^2}{4}$.
Ο όγκος κυλίνδρου είναι $V = Ah = \pi R^2 h$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
Α. ΥΓΡΑ ΣΕ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

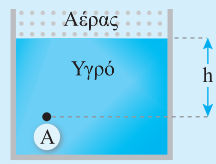
Π.1 ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΠΙΕΣΗ – ΑΡΧΗ ΤΟΥ PASCAL

1. ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΟΧΕΙΟ



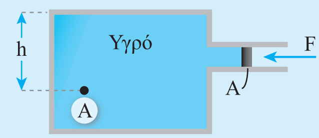
$$p_A = p_{υδ.} = \rho g h$$

2. ΑΝΟΙΧΤΟ ΔΟΧΕΙΟ



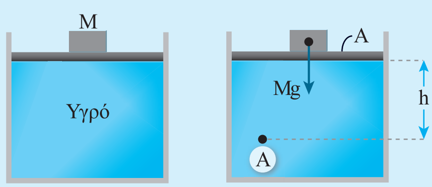
$$p_A = p_{at} + p_{υδ.}$$
$$p_A = p_{at} + \rho g h$$

3. ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΟΧΕΙΟ



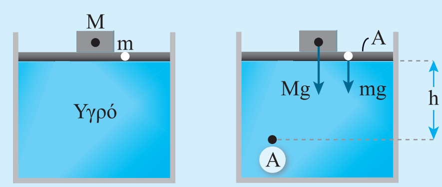
$$p_A = p_{εξ.} + p_{υδ.}$$
$$p_A = \frac{F}{A} + \rho g h$$

4. ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΟΧΕΙΟ ΜΕ ΑΒΑΡΕΣ ΕΜΒΟΛΟ ΕΜΒΑΔΟΥ Α



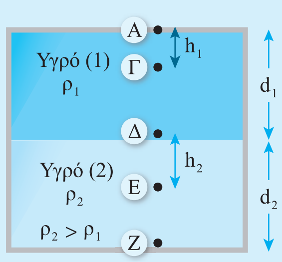
$$p_A = p_{εξ.} + p_{υδ.}$$
$$p_A = \frac{Mg}{A} + \rho g h$$

5. ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΟΧΕΙΟ ΜΕ ΕΜΒΟΛΟ ΜΑΖΑΣ m ΚΑΙ ΕΜΒΑΔΟΥ Α



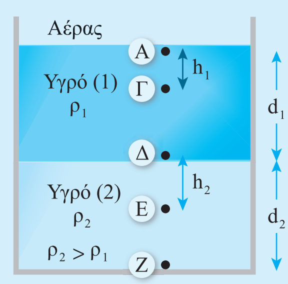
$$p_A = p_{εξ.} + \rho_{υδ.}$$
$$p_A = \frac{(M+m)g}{A} + \rho g h$$

6. ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΟΧΕΙΟ ΜΕ ΔΥΟ ΜΗ ΑΝΑΜΕΙΓΝΥΟΜΕΝΑ ΥΓΡΑ



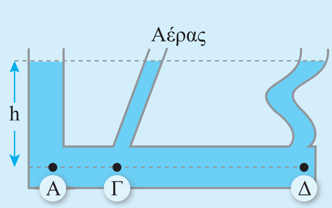
$$p_A = 0$$
$$p_\Gamma = \rho_1 g h_1$$
$$p_\Delta = \rho_1 g d_1$$
$$p_E = \rho_1 g d_1 + \rho_2 g h_2$$
$$p_Z = \rho_1 g d_1 + \rho_2 g d_2$$

7. ΑΝΟΙΧΤΟ ΔΟΧΕΙΟ ΜΕ ΔΥΟ ΜΗ ΑΝΑΜΕΙΓΝΥΟΜΕΝΑ ΥΓΡΑ



$$p_A = p_{at}$$
$$p_\Gamma = p_{at} + \rho_1 g h_1$$
$$p_\Delta = p_{at} + \rho_1 g d_1$$
$$p_E = p_{at} + \rho_1 g d_1 + \rho_2 g h_2$$
$$p_Z = p_{at} + \rho_1 g d_1 + \rho_2 g d_2$$

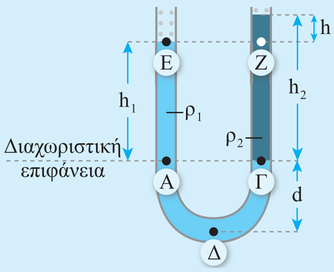
Π.2 ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΣΥΓΚΟΙΝΩΝΟΥΝΤΩΝ ΔΟΧΕΙΩΝ



$$p_A = p_\Gamma = p_\Delta = p_{at} + \rho g h$$

Η ελεύθερη επιφάνεια υγρού που βρίσκεται σε ισορροπία είναι επίπεδο οριζόντιο.
Αιτιολόγηση: Η υδροστατική πίεση $p_{υδ.} = \rho g h$ σε δεδομένο βάθος h του υγρού εξαρτάται μόνο από το βάθος αυτού του σημείου και όχι από κάποια οριζόντια διάσταση του υγρού ή του δοχείου που το περιέχει, δηλαδή είναι ανεξάρτητη από το σχήμα του δοχείου.

Π.3 ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΔΥΟ ΜΗ ΑΝΑΜΕΙΓΝΥΟΜΕΝΩΝ ΥΓΡΩΝ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΕΣ ($\rho_1 > \rho_2$)



- **Πάνω από τη διαχωριστική επιφάνεια δύο μη αναμειγνυόμενων υγρών ισχύει $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$.**

Αιτιολόγηση: Για την πίεση του σημείου Δ έχουμε:

$p_\Delta = p_{at} + \rho_1 g(h_1 + d) \Rightarrow p_\Delta = p_{at} + \rho_1 g h_1 + \rho_1 g d \quad (1)$

$p_\Delta = p_{at} + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g d \quad (2)$. Από τους (1). (2) έχουμε:

$$p_{at} + \rho_1 g h_1 + \rho_1 g d = p_{at} + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g d \Rightarrow \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \quad (3) \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (4)$$

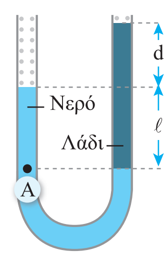
- **Οι ελεύθερες επιφάνειές τους δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.**

- **Σημεία που βρίσκονται στο ίδιο υγρό και στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο έχουν ίσες πιέσεις ($p_A = p_\Gamma$).**
Αιτιολόγηση: Έχουμε $p_A = p_{at} + \rho_1 g h_1$ και $p_\Gamma = p_{at} + \rho_2 g h_2 \overset{(3)}{=} p_{at} + \rho_1 g h_1$. Άρα $p_A = p_\Gamma$.

- **Σημεία που βρίσκονται σε διαφορετικά υγρά και στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο έχουν διαφορετικές πιέσεις ($p_E \neq p_Z$).**
Αιτιολόγηση: Έχουμε $p_E = p_{at}$ και $p_Z = p_{at} + \rho_2 g h$, άρα $p_E \neq p_z$.

Εφαρμογή

Ο ανοιχτός σωλήνας σε σχήμα U του διπλανού σχήματος περιέχει νερό και λάδι σε στατική ισορροπία. Το νερό έχει πυκνότητα $\rho_V = 998\,kg/m^3$ και το λάδι πυκνότητα ρ_λ. Η μέτρηση δίνει $\ell = 18{,}4\,cm$ και $d = 1{,}56\,cm$. Πόση είναι η πυκνότητα του λαδιού και η πίεση του σημείου Α;
Δίνεται $g = 10\,m/s^2$ και $1Atm = 10^5\,Pa$.



Λύση

$\rho_V = 998\,kg/m^3$, $\ell = 18{,}4\,cm = 0{,}184\,m$, $d = 1{,}56\,cm = 0{,}0156\,m$, $g = 10\,m/s^2$, $1Atm = 10^5\,Pa$, $\rho_\lambda = ;$, $p_A = ;$

- Για την πίεση του σημείου Δ έχουμε:

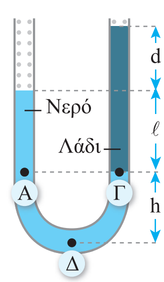
$p_\Delta = p_{at} + \rho_v g(\ell + h) = p_{at} + \rho_v g\ell + \rho_v gh \quad (1)$

$p_\Delta = p_{at} + \rho_\lambda g(\ell + d) + \rho_v gh \quad (2)$

Από τους (1), (2) $\Rightarrow p_{at} + \rho_v g\ell + \rho_v gh = p_{at} + \rho_\lambda g(\ell + d) + \rho_v gh \Rightarrow$

$\rho_v g\ell = \rho_\lambda g(\ell + d) \Rightarrow \rho_v \ell = \rho_\lambda(\ell + d) \Rightarrow$

$\rho_\lambda = \rho_v \frac{\ell}{\ell + d} \Rightarrow \rho_\lambda = 998 \cdot \frac{0{,}184}{0{,}1996}\,kg/m^3 \Rightarrow \boldsymbol{\rho_\lambda = 920\,kg/m^3}$



- ***1ος τρόπος***

Είναι $p_A = p_{at} + \rho_v g\ell \Rightarrow p_A = (10^5 + 998 \cdot 10 \cdot 0{,}184)\,Pa \Rightarrow \boldsymbol{p_A = 101 \cdot 836{,}32\,Pa.}$

2ος τρόπος

Τα σημεία Α, Γ βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο υγρών, οπότε $p_A = p_\Gamma$.

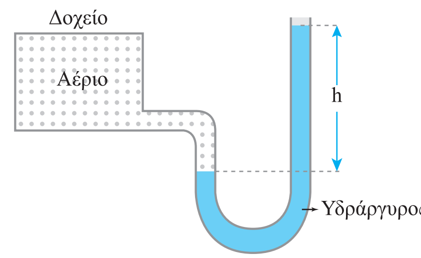
Είναι $p_\Gamma = p_{at} + \rho_\lambda g(d + \ell) = (10^5 + 920 \cdot 10 \cdot 0{,}1996)\,Pa = 101.836{,}32\,Pa$.

Άρα $\boldsymbol{p_A = p_\Gamma = 101.836{,}32\,Pa.}$

Π.4 ΜΑΝΟΜΕΤΡΟ ΑΝΟΙΧΤΟΥ ΣΩΛΗΝΑ

Εφαρμογή

Το μανόμετρο ανοιχτού σωλήνα του διπλανού σχήματος περιλαμβάνει κλειστό δοχείο που περιέχει αέριο, που είναι συνδεδεμένο με σωλήνα σχήματος U που περιέχει υδράργυρο με πυκνότητα $\rho = 13.600\ kg/m^3$. Το δεξιό άκρο του σωλήνα είναι ανοιχτό στην ατμόσφαιρα και ο υδράργυρος ισορροπεί. Η μέτρηση δίνει $h = 20\ cm$. Πόση είναι η πίεση του αερίου που περιέχεται στο δοχείο;
Δίνεται $g = 10\ m/s^2$ και $1 Atm = 10^5\ Pa$.



Λύση

$\rho = 13.600\ kg/m^2$, $h = 20\ cm = 0{,}2\ m$, $g = 10\ m/s^2$, $1 Atm = 10^5\ Pa$, $p_{αερ.} = ;$

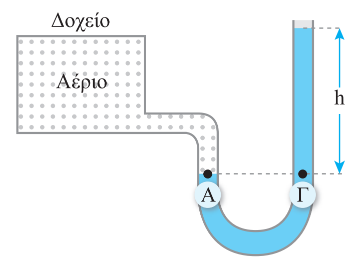
Το σημείο Α βρίσκεται στη διαχωριστική επιφάνεια του αερίου με τον υδράργυρο, οπότε $p_{αερ.} = p_A$ (1).

Τα σημεία Α, Γ βρίσκονται στο ίδιο υγρό και στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, οπότε: $p_A = p_Γ$ (2).

Είναι $p_Γ = p_{at} + \rho g h = \left(10^5 + 13.600 \cdot 10 \cdot 0{,}2\right) Pa = 127.200\ Pa \Rightarrow$

$p_Γ = 127.200\ Pa$ (3).

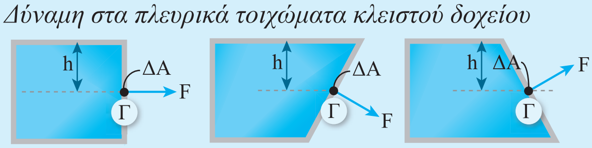
Από (1), (2), (3) έχουμε $\mathbf{p_{αερ.} = 127.200\ Pa}$.



Π.5 ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΟΥ ΑΣΚΟΥΝΤΑΙ ΛΟΓΩ ΠΙΕΣΗΣ

Έστω μια στοιχειώδης επιφάνεια εμβαδού ΔΑ που βρίσκεται σε σημείο Γ υγρού σε βάθος h. Η δύναμη $\vec{F}$ που δέχεται η επιφάνεια από το υγρό έχει:
– μέτρο $F = p \cdot ΔA$
– κατεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια.

- *Δύναμη στα πλευρικά τοιχώματα κλειστού δοχείου*



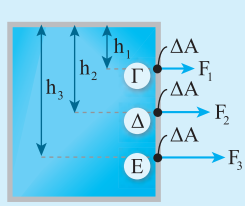
$$F = p_Γ \cdot ΔA = \rho g h \cdot ΔA$$

- *Η δύναμη F που ασκείται από το υγρό στα πλάγια τοιχώματα ενός δοχείου δεν είναι σταθερή αλλά αυξάνεται με το βάθος h.*

Αιτιολόγηση

Θεωρούμε γύρω από τα σημεία Γ, Δ, Ε μια στοιχειώδη επιφάνεια εμβαδού ΔΑ. Είναι:

$F_1 = p_Γ \cdot ΔA = \rho g h_1 \cdot ΔA$
$F_2 = p_Δ \cdot ΔA = \rho g h_2 \cdot ΔA$
$F_3 = p_E \cdot ΔA = \rho g h_3 \cdot ΔA$

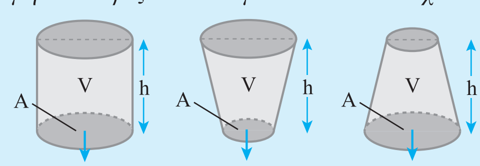


Επειδή $h_3 > h_2 > h_1$, είναι $F_3 > F_2 > F_1$.

Για τον λόγο αυτό τα φράγματα στις τεχνητές λίμνες, όπως και οι μεγάλες δεξαμενές, κατασκευάζονται σχετικά λεπτά στην κορυφή τους και πολύ φαρδιά στη βάση τους.

Έστω μια επίπεδη επιφάνεια εμβαδού Α σε κάθε σημείο της οποίας η πίεση είναι p. Τότε η δύναμη $\vec{F}$ που δέχεται η επιφάνεια έχει:
– μέτρο $F = pA$
– κατεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια.

- *Δύναμη στον οριζόντιο πυθμένα κλειστού δοχείου*



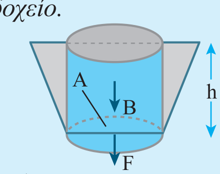
$F = B_{υγ.}$ $F < B_{υγ.}$ $F > B_{υγ.}$

$$F = pA = \rho g h A$$

- *Η δύναμη F που ασκείται στον πυθμένα από το υγρό είναι ίση με το βάρος της υγρής στήλης, η οποία έχει βάση τον πυθμένα και ύψος την κατακόρυφη απόστασή του από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού ανεξάρτητα από το σχήμα του δοχείου. Άρα η δύναμη F δεν είναι πάντοτε ίση με το βάρος του περιεχόμενου υγρού στο δοχείο.*

Αιτιολόγηση

Για τη στήλη του υγρού μάζας m, βάρους Β και όγκου V που βρίσκεται πάνω από τον πυθμένα έχουμε:



$\rho = \dfrac{m}{V}$ (1), $V = hA$ (2), $B = mg$ (3)

Είναι $F = pA = \rho g h A \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} \dfrac{m}{V} g V = mg \overset{(3)}{=} B$.

Άρα $F = B$ και $F < B_{υγρού\,(του\ δοχείου)}$.

Εφαρμογή

Κυλινδρικό δοχείο έχει διατομή ακτίνας $r = 0{,}1\ m$, μήκος $\ell = 0{,}4\ m$ και είναι γεμάτο με νερό πυκνότητας $\rho = 1.000\ kg/m^3$.

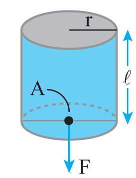
α) Να βρείτε το μέτρο της δύναμης που ασκείται από το υγρό στον οριζόντιο πυθμένα του δοχείου όταν αυτό βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση.

β) Να βρείτε το μέτρο της δύναμης που ασκείται από το υγρό σε στοιχειώδη επιφάνεια εμβαδού $\Delta A = 10^{-6}\ m^2$ που βρίσκεται στο κέντρο της διατομής όταν το δοχείο είναι οριζόντιο.

Δίνεται $g = 10\ m/s^2$, $\pi = 3{,}14$.

Λύση

$r = 0{,}1\ m$, $\ell = 0{,}4\ m$, $\rho = 1.000\ kg/m^3$, $g = 10\ m/s^2$, $\pi = 3{,}14$



α) $F = ;$

Η πίεση p σε κάθε σημείο του πυθμένα είναι $p = \rho g \ell$ (1). Το εμβαδόν A του πυθμένα είναι $A = \pi r^2$ (2).

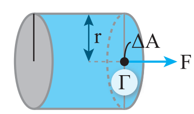
Είναι $F = pA \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} \rho g \ell \pi r^2 = 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}01\ N = 125{,}6\ N \Rightarrow \mathbf{F = 125{,}6\ N}$.

β) $\Delta A = 10^{-6}\ m^2$, $F = ;$

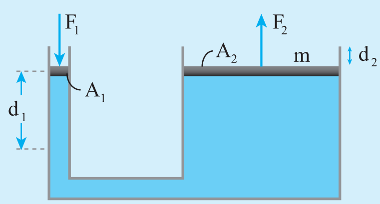
Η πίεση στο σημείο Γ είναι $p_\Gamma = \rho g r$ (3).

Η δύναμη που δέχεται η στοιχειώδης επιφάνεια από το υγρό είναι:

$F = p_\Gamma \cdot \Delta A = \rho g r \cdot \Delta A = 1.000 \cdot 10 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-6}\ N = 10^{-3}\ N \Rightarrow \mathbf{F = 10^{-3}\ N}$



Π.6 ΥΔΡΑΥΛΙΚΟ ΠΙΕΣΤΗΡΙΟ (ΥΔΡΑΥΛΙΚΟΣ ΜΟΧΛΟΣ)



$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2} \qquad \frac{d_1}{d_2} = \frac{A_2}{A_1} \qquad W_{F_1} = W_{F_2} = F_1 d_1 = F_2 d_2$$

Οι παραπάνω τύποι χρησιμοποιούνται πάντα με απόδειξη

Με το υδραυλικό πιεστήριο δεδομένη δύναμη (F_1) που εφαρμόζεται κατά μήκος δεδομένης μετατόπισης (d_1) μπορεί να μετασχηματιστεί σε μεγαλύτερη δύναμη (F_2) που εφαρμόζεται κατά μήκος μικρότερης μετατόπισης (d_2). Δηλαδή $\mathbf{F_2 > F_1}$ και $\mathbf{d_2 < d_1}$ αφού $\mathbf{A_2 > A_1}$.

Απόδειξη

- Κατά τη λειτουργία του πιεστηρίου, μια εξωτερική δύναμη μέτρου F_1 με φορά προς τα κάτω εφαρμόζεται στο αριστερό έμβολο που έχει εμβαδόν επιφάνειας A_1. Το υγρό που περιέχεται στο δοχείο είναι ασυμπίεστο. Η δύναμη προκαλεί μεταβολή στην πίεση κατά $\Delta p_1 = \dfrac{F_1}{A_1}$ (1). Σύμφωνα με την αρχή του Pascal, η μεταβολή αυτή μεταφέρεται αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία του υγρού και στο δεξιό έμβολο που έχει εμβαδόν επιφάνειας A_2. Έτσι, στο δεξιό έμβολο παράγεται η δύναμη F_2, αφού η μεταβολή της πίεσης είναι $\Delta p_2 = \dfrac{F_2}{A_2}$ (2). Όπως αναφέραμε παραπάνω, από την αρχή του Pascal έχουμε $\Delta p_1 = \Delta p_2 \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Longrightarrow}} \dfrac{F_1}{A_1} = \dfrac{F_2}{A_2} \Rightarrow \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{A_1}{A_2}$ (3).

Σχόλιο

Για να διατηρείται το υγρό σε ισορροπία πρέπει πάνω στο δεξιό έμβολο να είναι τοποθετημένο σώμα βάρους $B = F_2$.

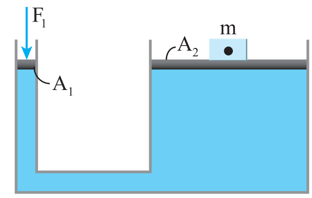
- Αν μετακινήσουμε πολύ αργά το αριστερό έμβολο προς τα κάτω κατά απόσταση d_1, το δεξιό έμβολο κινείται προς τα πάνω κατά απόσταση d_2, ώστε ο ίδιος όγκος V υγρού να μετατοπίζεται και στα δύο έμβολα, αφού το υγρό είναι ασυμπίεστο.

  Έχουμε $V = A_1 d_1 = A_2 d_2 \Rightarrow \dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{A_2}{A_1}$ (4).

- $$\left.\begin{array}{l} W_{F_1} = F_1 d_1 \\ W_{F_2} = F_2 d_2 \end{array}\right\} \overset{(:)}{\Longrightarrow} \frac{W_{F_1}}{W_{F_2}} = \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{d_1}{d_2} \overset{(3)}{\underset{(4)}{=}} \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{A_2}{A_1} = 1 \Rightarrow W_{F_1} = W_{F_2}$$

  Άρα το έργο που εκτελείται στο έμβολο εισόδου και στο έμβολο εξόδου είναι το ίδιο.

Εφαρμογή



Ο υδραυλικός ανυψωτήρας του διπλανού σχήματος χρησιμοποιείται για την ανύψωση σώματος μάζας m = 1.000 kg.

α) Πόση δύναμη F_1 πρέπει να ασκήσουμε στο αριστερό έμβολο ώστε να επιτύχουμε την πολύ αργή ανύψωση της μάζας m;

β) Κατά πόσο προς τα κάτω πρέπει να μετακινήσουμε το αριστερό έμβολο, ώστε το σώμα να ανυψωθεί κατά $d_2 = 0{,}1$ m;

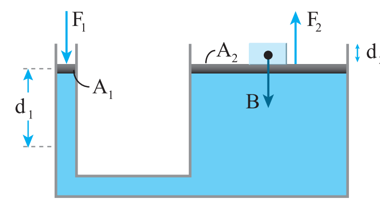
γ) Να βρείτε τα έργα των δυνάμεων F_1, F_2. Τι παρατηρείτε;

Τα έμβολα είναι κυλινδρικά με ακτίνες R_1 και $R_2 = 5R_1$ και $g = 10$ m/s^2.

Λύση

$m = 1.000$ kg, $R_2 = 5R_1$, $g = 10$ m/s^2

α) $F_1 = ;$



Κατά τη λειτουργία του ανυψωτήρα μια εξωτερική δύναμη μέτρου F_1 με φορά προς τα κάτω εφαρμόζεται στο αριστερό έμβολο που έχει εμβαδόν επιφάνειας $A_1 = \pi R_1^2$ (1). Το υγρό που περιέχεται στο δοχείο είναι ασυμπίεστο. Η δύναμη αυτή προκαλεί μεταβολή στην πίεση κατά $\Delta p_1 = \dfrac{F_1}{A_1}$ (2). Σύμφωνα με την αρχή του Pascal, η μεταβολή αυτή μεταφέρεται αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία του υγρού και στο δεξιό έμβολο που έχει εμβαδόν επιφάνειας $A_2 = \pi R_2^2$ (3). Έτσι, στο δεξιό έμβολο παράγεται δύναμη F_2, αφού η μεταβολή της πίεσης είναι $\Delta p_2 = \dfrac{F_2}{A_2}$ (4). Όπως αναφέραμε παραπάνω, από την αρχή του Pascal έχουμε:

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 \overset{(2)}{\underset{(4)}{\Longrightarrow}} \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2} \overset{(1)}{\underset{(3)}{\Longrightarrow}} \frac{F_1}{F_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{R_1^2}{25R_1^2} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{25} \Rightarrow F_1 = \frac{1}{25}F_2 \quad (5)$$

Για να ανυψώνεται το δεξιό έμβολο πολύ αργά (με σταθερή ταχύτητα), πρέπει $F_2 = B = mg = 10.000$ N.

Άρα (5) $\Rightarrow F_1 = \dfrac{1}{25} \cdot 10.000 \text{ N} \Rightarrow$ **$F_1 = 400$ N.**

β) $d_2 = 0{,}1$ m, $d_1 = ;$

Μετακινώντας πολύ αργά το αριστερό έμβολο προς τα κάτω κατά απόσταση d_1, το δεξιό έμβολο κινείται προς τα πάνω κατά απόσταση d_2, ώστε ο ίδιος όγκος υγρού V να μετατοπίζεται και στα δύο έμβολα, αφού το υγρό είναι ασυμπίεστο. Έχουμε $V = A_1 d_1 = A_2 d_2 \Rightarrow \pi R_1^2 d_1 = \pi R_2^2 d_2 \Rightarrow R_1^2 d_1 = 25R_1^2 d_2 \Rightarrow d_1 = 25d_2 \Rightarrow$ **$d_1 = 2{,}5$ m.**

γ) $W_{F_1} = ;$, $W_{F_2} = ;$

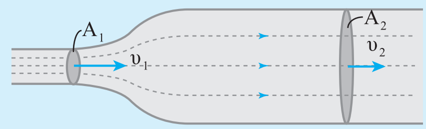
- $W_{F_1} = F_1 d_1 = 400 \cdot 2{,}5 \text{ J} = 1.000 \text{ J} \Rightarrow$ **$W_{F_1} = 1.000$ J**
- $W_{F_2} = F_2 d_2 = 10.000 \cdot 0{,}1 \text{ J} = 1.000 \text{ J} \Rightarrow$ **$W_{F_2} = 1.000$ J**

Παρατηρούμε ότι το έργο που εκτελείται στο έμβολο εισόδου και στο έμβολο εξόδου είναι το ίδιο.

Β. ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

Π.7 ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΣΕ ΙΔΑΝΙΚΟ ΡΕΥΣΤΟ

$$\Pi_1 = \Pi_2 \quad \text{ή} \quad A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2$$



- Κατά μήκος ενός σωλήνα ή μιας φλέβας η παροχή Π διατηρείται σταθερή.
- Εκεί που ο σωλήνας ροής (φλέβα) κλείνει, το εμβαδόν της διατομής Α στενεύει, οι ρευματικές γραμμές πυκνώνουν και η ταχύτητα ροής είναι πιο μεγάλη.
- Η μάζα Δm_1 του ρευστού που εισρέει στον σωλήνα από μια διατομή A_1 είναι ίση με τη μάζα Δm_2 του ρευστού που εκρέει από τη διατομή A_2, δηλαδή $\Delta m_1 = \Delta m_2$. Αντίστοιχα ισχύει $\Delta V_1 = \Delta V_2$.

Εφαρμογές

1. Ένας ποταμός σταθερού βάθους h έχει στρωτή ροή. Σε περιοχή του ποταμού που έχει κοίτη πλάτους 10 m τα νερά έχουν ταχύτητα 2 m/s. Με πόση ταχύτητα ρέουν τα νερά εκεί που η κοίτη στενεύει έχοντας πλάτος 2,5 m;

Λύση

$h = \text{σταθ.}, \quad d_1 = 10\,\text{m}, \quad \upsilon_1 = 2\,\text{m/s}, \quad d_2 = 2{,}5\,\text{m}, \quad \upsilon_2 = ;$

Αν θεωρήσουμε το ποτάμι σαν μια φλέβα, η παροχή είναι σταθερή, αφού η ροή είναι στρωτή. Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow d_1h\upsilon_1 = d_2h\upsilon_2 \Rightarrow d_1\upsilon_1 = d_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \upsilon_1\frac{d_1}{d_2} \Rightarrow \upsilon_2 = 2\cdot\frac{10}{2{,}5}\,\text{m/s} \Rightarrow \mathbf{\upsilon_2 = 8\,m/s}$$

2. Ένας ποταμός σταθερού πλάτους έχει στρωτή ροή. Σε ένα σημείο όπου το μέσο βάθος είναι $h_1 = 2$ m τα νερά τρέχουν με ταχύτητα $\upsilon_1 = 0{,}8$ m/s. Πόσο είναι το μέσο βάθος σε ένα άλλο σημείο όπου τα νερά τρέχουν με ταχύτητα $\upsilon_2 = 4$ m/s;

Λύση

$h_1 = 2\,\text{m}, \quad \upsilon_1 = 0{,}8\,\text{m/s}, \quad \upsilon_2 = 4\,\text{m/s}, \quad h_2 = ;$

Έστω d το σταθερό πλάτος του ποταμού. Αν θεωρήσουμε το ποτάμι σαν μια φλέβα, η παροχή είναι σταθερή, αφού η ροή είναι στρωτή. Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow dh_1\upsilon_1 = dh_2\upsilon_2 \Rightarrow h_1\upsilon_1 = h_2\upsilon_2 \Rightarrow h_2 = h_1\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} \Rightarrow h_2 = 2\cdot\frac{0{,}8}{4}\,\text{m} \Rightarrow \mathbf{h_2 = 0{,}4\,m}$$

3. Η παροχή μιας βρύσης είναι $1{,}44\cdot 10^{-3}$ m³/s. Η βρύση συνδέεται με λάστιχο που το ελεύθερο άκρο του έχει εσωτερική διάμετρο $\delta = \dfrac{12}{\sqrt{\pi}}$ cm.

α) Με πόση ταχύτητα εκτοξεύεται το νερό από το άκρο του λάστιχου;

β) Βάζοντας το δάχτυλό μας μπροστά στην άκρη του λάστιχου μειώνουμε την ελεύθερη διατομή του λάστιχου στο $\dfrac{1}{4}$. Με πόση ταχύτητα εκτοξεύεται τώρα το νερό;

Λύση

$\Pi = 1{,}44\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s}, \quad \delta = \dfrac{12}{\sqrt{\pi}}\,\text{cm} = \dfrac{12}{\sqrt{\pi}}\cdot 10^{-2}\,\text{m}$

α) $\upsilon = ;$

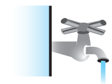
Θεωρώντας το νερό ιδανικό ρευστό, η παροχή είναι σταθερή.

Είναι $\Pi = A\upsilon \Rightarrow \Pi = \dfrac{\pi\delta^2}{4}\upsilon \Rightarrow \upsilon = \dfrac{4\Pi}{\pi\delta^2} \Rightarrow \upsilon = \dfrac{4\cdot 1{,}44\cdot 10^{-3}}{\pi\cdot\dfrac{12^2\cdot 10^{-4}}{\pi}}\,\text{m/s} \Rightarrow \mathbf{\upsilon = 0{,}4\,m/s.}$

β) $\upsilon_1 = 0{,}4\,\text{m/s}, \quad A_2 = \dfrac{1}{4}A_1, \quad \upsilon_2 = ;$

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε $\upsilon_1A_1 = \upsilon_2A_2 \Rightarrow \upsilon_1A_1 = \upsilon_2\cdot\dfrac{1}{4}A_1 \Rightarrow \upsilon_2 = 4\upsilon_1 \Rightarrow \mathbf{\upsilon_2 = 1{,}6\,m/s.}$

4. Η παροχή της βρύσης του διπλανού σχήματος είναι $\Pi = 10^{-2}\ m^3/s$. Το στόμιο της βρύσης έχει εσωτερική διάμετρο $\delta_1 = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$ cm.

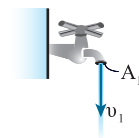


α) Με πόση ταχύτητα υ_1 εξέρχεται το νερό από τη βρύση;
β) Να εξηγήσετε γιατί η φλέβα του νερού λεπταίνει καθώς πέφτει.
γ) Να βρείτε το εμβαδόν της διατομής της φλέβας του νερού 0,45 m πιο κάτω από το στόμιο της βρύσης. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

Λύση

$\Pi = 10^{-2}\ m^3/s$, $\quad \delta_1 = \frac{10}{\sqrt{\pi}}\ cm = \frac{10 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{\pi}}\ m = \frac{10^{-1}}{\sqrt{\pi}}\ m$, $\quad g = 10\ m/s^2$

α) $\upsilon_1 = ;$

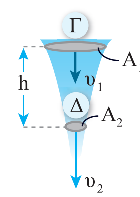


Το εμβαδόν διατομής της φλέβας του νερού στο στόμιο της βρύσης είναι:

$$A_1 = \frac{\pi\delta_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot \frac{10^{-2}}{\pi}}{4}\ m^2 = \frac{10^{-2}}{4}\ m^2 \Rightarrow A_1 = \frac{10^{-2}}{4}\ m^2$$

$$\text{Έχουμε } \Pi = A_1\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{\Pi}{A_1} = \frac{10^{-2}}{\frac{10^{-2}}{4}}\ m/s \Rightarrow \upsilon_1 = 4\ m/s.$$

β) η φλέβα λεπταίνει;



Καθώς το νερό πέφτει το μέτρο της ταχύτητάς του αυξάνεται ($\upsilon_2 > \upsilon_1$). Επειδή η παροχή είναι σταθερή, μειώνεται η οριζόντια διατομή της ροής ($A_2 < A_1$), **οπότε λεπταίνει η φλέβα**.

γ) $h = 0{,}45\ m$, $\quad A_2 = ;$

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε $\upsilon_1 A_1 = \upsilon_2 A_2 \Rightarrow A_2 = A_1\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$ (1).

Έστω υ_1, υ_2 οι ταχύτητες ενός μορίου νερού που κινείται κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής κατεβαίνοντας κατακόρυφα κατά $h = 0{,}45$ m.

Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ των θέσεων Γ, Δ, έχουμε:

$$\text{Θ.Μ.Κ.Ε. (Γ, Δ): } K_{\tau\varepsilon\lambda.(\Delta)} - K_{\alpha\rho\chi.(\Gamma)} = W_B \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = +mgh \Rightarrow \upsilon_2^2 - \upsilon_1^2 = 2gh \Rightarrow \upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 + 2gh \Rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1^2 + 2gh} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \upsilon_2 = \sqrt{4^2 + 2 \cdot 10 \cdot 0{,}45}\ m/s \Rightarrow \upsilon_2 = 5\ m/s$$

- Άρα (1) $\Rightarrow A_2 = \frac{10^{-2}}{4} \cdot \frac{4}{5}\ m^2 = \frac{10^{-2}}{5}\ m^2 = 2 \cdot 10^{-3}\ m^2 \Rightarrow \mathbf{A_2 = 2 \cdot 10^{-3}\ m^2}$.

Ένας άλλος τρόπος εύρεσης της A_2 είναι:

$$\Pi = A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow A_2 = \frac{\Pi}{\upsilon_2} \Rightarrow A_2 = \frac{10^{-2}}{5}\ m^2 \Rightarrow A_2 = 2 \cdot 10^{-3}\ m^2$$

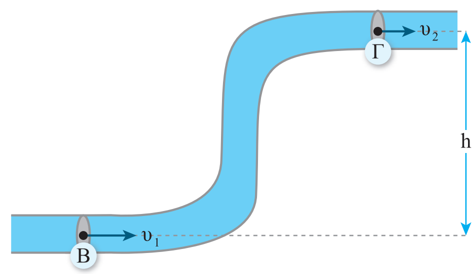
Π.8 ΕΞΙΣΩΣΗ (ΝΟΜΟΣ) ΤΟΥ BERNOULLI

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g y_2$$

Η παραπάνω εξίσωση ισχύει για ένα ιδανικό ρευστό που ρέει σε σωλήνα μεταβλητής διατομής που δεν είναι οριζόντιος, για δύο σημεία Β και Γ του σωλήνα που έχουν υψομετρική διαφορά.
Τα y_1, υ_1, p_1 είναι αντίστοιχα το ύψος από τη στάθμη αναφοράς για τη μέτρηση των υψών, η ταχύτητα και η πίεση του υγρού στο σημείο Β. Τα y_2, υ_2, p_2 είναι αντίστοιχα το ύψος από τη στάθμη αναφοράς για τη μέτρηση των υψών, η ταχύτητα και η πίεση του υγρού στο σημείο Γ.

Εφαρμογές

1. Στον σωλήνα του διπλανού σχήματος ρέει νερό από το σημείο Β προς το σημείο Γ, με τα Β, Γ να απέχουν κατακόρυφα h = 5 m. Στο σημείο Β η πίεση του νερού είναι 2Atm και η ταχύτητά του 10 m/s, ενώ στο σημείο Γ η πίεση του νερού είναι 1,82 Atm.
α) Πόση είναι η ταχύτητα του νερού στο σημείο Γ;
β) Πόσος είναι ο λόγος των εμβαδών των διατομών του σωλήνα στα σημεία Β, Γ;
Δίνεται η πυκνότητα του νερού 10^3 kg/m^3, g = 10 m/s^2, 1Atm = 10^5 Pa.



Λύση

$h = 5\,m$, $p_1 = 2Atm = 2 \cdot 10^5\,Pa$, $\upsilon_1 = 10\,m/s$, $p_2 = 1{,}82Atm = 1{,}82 \cdot 10^5\,Pa$, $\rho = 10^3\,kg/m^3$, $g = 10\,m/s^2$, $1Atm = 10^5\,Pa$

α) $\upsilon_2 = ;$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία Β, Γ, έχουμε $p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g y_2$ (1).

Θεωρώντας τη στάθμη του σημείου Β στάθμη αναφοράς για τη μέτρηση των υψών, έχουμε $y_1 = 0$ και $y_2 = h$.

Άρα (1) $\Rightarrow p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + 0 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g h \Rightarrow 2 \cdot 10^5 + \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot 10^2 = 1{,}82 \cdot 10^5 + \frac{1}{2} \cdot 10^3\upsilon_2^2 + 10^3 \cdot 10 \cdot 5 \Rightarrow$

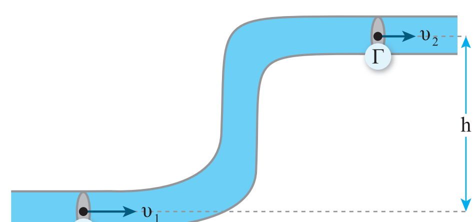
$200.000 + 50.000 = 182.000 + 500\upsilon_2^2 + 50.000 \Rightarrow 500\upsilon_2^2 = 18.000 \Rightarrow \upsilon_2^2 = 36\,m^2/s^2 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_2 = 6\,m/s}$.

β) $\frac{A_1}{A_2} = ;$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση της συνέχειας για τα σημεία Β, Γ, έχουμε:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{3}{5}$$

2. Στον σωλήνα σταθερής διατομής του διπλανού σχήματος ρέει νερό από το σημείο Β προς το σημείο Γ. Στα σημεία Β, Γ η πίεση του νερού είναι 5Atm και 3Atm αντίστοιχα. Πόση είναι η κατακόρυφη απόσταση h των Β, Γ;
Δίνεται η πυκνότητα του νερού 10^3 kg/m^2, g = 10 m/s^2, 1Atm = 10^5 Pa.



Λύση

$p_1 = 5Atm = 5 \cdot 10^5\,Pa$, $p_2 = 3Atm = 3 \cdot 10^5\,Pa$, $\rho = 10^3\,kg/m^3$, $g = 10\,m/s^2$, $1Atm = 10^5\,Pa$, $h = ;$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία Β, Γ, έχουμε $p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g y_2$ (1).

Θεωρώντας τη στάθμη του σημείου Β στάθμη αναφοράς για τη μέτρηση των υψών, έχουμε $y_1 = 0$ και $y_2 = h$.
Ο σωλήνας έχει σταθερή διατομή, οπότε $A_1 = A_2 = A$ (2).
Εφαρμόζοντας την εξίσωση της συνέχειας για τα σημεία Β, Γ, έχουμε $\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \overset{(2)}{\Longrightarrow} \upsilon_1 = \upsilon_2$ (3).

Άρα (1) $\overset{(3)}{\Longrightarrow} p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + 0 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g h \Rightarrow p_1 = p_2 + \rho g h$ (4) $\Rightarrow$

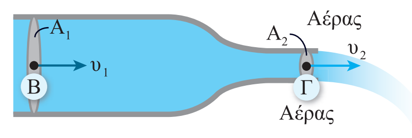
$\rho g h = p_1 - p_2 \Rightarrow h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \Rightarrow h = \frac{5 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10}\,m = \frac{2 \cdot 10^5}{10^4}\,m = 20\,m \Rightarrow \boldsymbol{h = 20\,m}$.

Παρατήρηση

Από την (4) παρατηρούμε ότι σε σωλήνα σταθερής διατομής η εξίσωση του Bernoulli παίρνει τη μορφή $p_1 = p_2 + \rho g h$.

- Είναι $p_2 < p_1$, δηλαδή με την αύξηση της κατακόρυφης απόστασης h η πίεση μειώνεται.
- Είναι $\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g h$, δηλαδή η μεταβολή της πίεσης είναι ανάλογη της κατακόρυφης απόστασης h.

3. Νερό κινείται σε οριζόντιο σωλήνα. Η διατομή του σωλήνα στη θέση Β είναι $A_1 = 18\,cm^2$ και στη θέση Γ (άκρο του σωλήνα) γίνεται $A_2 = 6\,cm^2$. Η ταχύτητα του νερού στο σημείο Β είναι $\upsilon_1 = 4\,m/s$.
α) Με πόση ταχύτητα υ_2 βγαίνει το νερό από το άκρο Γ του σωλήνα;
β) Πόση είναι η πίεση του νερού στο σημείο Β;
Δίνεται η πυκνότητα του νερού $10^3\,kg/m^3$, $g = 10\,m/s^2$, $1Atm = 10^5\,Pa$ και ότι τα σημεία Β, Γ δεν έχουν υψομετρική διαφορά.



Λύση

$A_1 = 18\,cm^2$, $A_2 = 6\,cm^2$, $\upsilon_1 = 4\,m/s$, $\rho = 10^3\,kg/m^3$, $g = 10\,m/s^2$, $1Atm = 10^5\,Pa$

α) $\upsilon_2 = ;$

Σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας για τα σημεία Β, Γ, έχουμε:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \upsilon_1\frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \upsilon_2 = 4\cdot\frac{18}{6}\,m/s \Rightarrow \mathbf{\upsilon_2 = 12\,m/s}$$

β) $p_1 = ;$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία Β, Γ, έχουμε $p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g y_2$ (1).

Θεωρώντας τη στάθμη των σημείων Β, Γ στάθμη αναφοράς για τη μέτρηση των υψών, έχουμε $y_1 = y_2 = 0$.

Το σημείο Γ είναι εκτεθειμένο στην ατμόσφαιρα, οπότε $p_\Gamma = p_{at} = 1Atm = 10^5\,Pa$.

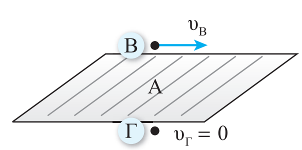
$$\text{Άρα (1)} \Rightarrow p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \Rightarrow p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \Rightarrow p_1 = \left(10^5 + \frac{1}{2}\cdot10^3\cdot12^2 - \frac{1}{2}\cdot10^3\cdot4^2\right)Pa =$$

$$= \left(100.000 + 72.000 - 8.000\right)Pa = 164.000\,Pa = 1{,}64\cdot10^5\,Pa \Rightarrow \mathbf{p_1 = 1{,}64\cdot10^5\,Pa}.$$

4. Κατά τη διάρκεια μιας καταιγίδας ο αέρας κινείται πάνω από τη στέγη ενός σπιτιού με ταχύτητα 20 m/s.
α) Πόση είναι η διαφορά πίεσης Δp κάτω και πάνω από τη στέγη;
β) Πόση είναι η ανυψωτική δύναμη F που δέχεται η στέγη αν είναι επίπεδη και έχει εμβαδόν $A = 100\,m^2$;
γ) Πόση είναι η πίεση του αέρα ακριβώς πάνω από τη στέγη;
Δίνεται ότι η πυκνότητα του αέρα είναι σταθερή και ίση με $1{,}2\,kg/m^3$, $1Atm = 10^5\,Pa$.

Λύση

$\upsilon_B = 20\,m/s$, $\upsilon_\Gamma = 0$, $\rho = 1{,}2\,kg/m^3$, $1Atm = 10^5\,Pa$



α) $\Delta p = ;$

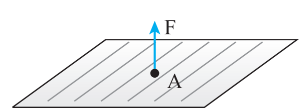
Έστω Β ένα σημείο ακριβώς πάνω από τη στέγη και Γ ένα άλλο σημείο ακριβώς κάτω από τη στέγη. Ο αέρας κάτω από τη στέγη είναι ακίνητος, οπότε $\upsilon_\Gamma = 0$.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία Β, Γ, έχουμε $p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 + \rho g y_1 = p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 + \rho g y_2$ (1).

Θεωρώντας τη στάθμη των σημείων Β, Γ στάθμη αναφοράς για τη μέτρηση των υψών, έχουμε $y_1 = y_2 = 0$.

$$(1) \Rightarrow p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 + 0 = p_\Gamma + 0 + 0 \Rightarrow p_\Gamma - p_B = \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 \Rightarrow \Delta p = \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 \Rightarrow \Delta p = \frac{1}{2}\cdot1{,}2\cdot20^2\,Pa \Rightarrow \mathbf{\Delta p = 240\,Pa}$$

β) $A = 100\,m^2$, $F = ;$



Λόγω της διαφοράς πίεσης Δp αναπτύσσεται μια δύναμη F με φορά προς τα πάνω που είναι κάθετη στη στέγη και έχει μέτρο $F = A\cdot\Delta p \Rightarrow F = 100\cdot240\,N \Rightarrow \mathbf{F = 24.000\,N}$.

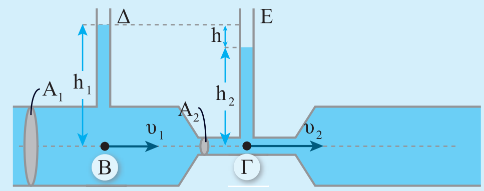
γ) $p_B = ;$

Κάτω από τη στέγη στο εσωτερικό του σπιτιού ο αέρας είναι ακίνητος, οπότε επικρατεί η ατμοσφαιρική πίεση, δηλαδή $p_\Gamma = p_{at} = 1Atm = 10^5\,Pa$. Έχουμε $\Delta p = p_\Gamma - p_B \Rightarrow p_B = p_\Gamma - \Delta p \Rightarrow p_B = \left(100.000 - 240\right)Pa \Rightarrow \mathbf{p_B = 99.760\,Pa}$.

Π.9 ΡΟΟΜΕΤΡΟ ΤΟΥ VENTOURI

$$\boldsymbol{\upsilon_1 = \sqrt{\dfrac{2gh}{\left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}}}$$

(με απόδειξη)



Απόδειξη

Ο σωλήνας Ventouri είναι μια διάταξη που χρησιμεύει για τη μέτρηση της ταχύτητας ροής ενός υγρού σε έναν σωλήνα. Έστω A_1, A_2 οι διατομές του σωλήνα και h η υψομετρική διαφορά του υγρού στους δύο κατακόρυφους ανοιχτούς σωλήνες Δ, Ε. Θεωρούμε τα σημεία Β, Γ που βρίσκονται στο ίδιο ύψος, δηλαδή δεν έχουν υψομετρική διαφορά.

Έχουμε $p_B = p_1 = p_{at} + \rho g h_1$ και $p_\Gamma = p_2 = p_{at} + \rho g h_2$, οπότε:

$$p_1 - p_2 = p_{at} + \rho g h_1 - p_{at} - \rho g h_2 = \rho g\left(h_1 - h_2\right) = \rho g h \Rightarrow p_1 - p_2 = \rho g h \quad (1)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας για τα σημεία Β, Γ, έχουμε $\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 υ_1 = A_2 υ_2 \Rightarrow υ_2 = \dfrac{A_1}{A_2}υ_1$ (2).

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία Β, Γ, έχουμε $p_1 + \dfrac{1}{2}\rho υ_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \dfrac{1}{2}\rho υ_2^2 + \rho g y_2$ (3).

Θεωρώντας τη στάθμη των σημείων Β, Γ στάθμη αναφοράς για τη μέτρηση των υψών, έχουμε $y_1 = y_2 = 0$.

$$\text{Άρα } (3) \Rightarrow p_1 + \frac{1}{2}\rho υ_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho υ_2^2 \overset{(2)}{\Longrightarrow} p_1 + \frac{1}{2}\rho υ_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\frac{A_1^2}{A_2^2}υ_1^2 \Rightarrow$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\frac{A_1^2}{A_2^2}υ_1^2 - \frac{1}{2}\rho υ_1^2 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \rho g h = \frac{1}{2}\rho υ_1^2\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right) \Rightarrow$$

$$gh = \frac{1}{2}υ_1^2\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right) \Rightarrow υ_1^2 = \frac{2gh}{\dfrac{A_1^2}{A_2^2} - 1} \Rightarrow υ_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}}.$$

Αριθμητική εφαρμογή

$A_1 = 3A_2$, $h = 0{,}1\,m$, $g = 10\,m/s^2$, $υ_1 = ;$

$$\text{Είναι } υ_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 0{,}1}{3^2 - 1}}\ m/s = \sqrt{\frac{2}{8}}\ m/s = 0{,}5\,m/s \Rightarrow \boldsymbol{υ_1 = 0{,}5\,m/s.}$$

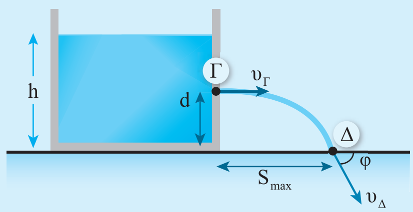
Π.10 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ TORRICELLI ΚΑΙ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΟΥ

Α. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΕΚΡΟΗΣ ΥΓΡΟΥ ΑΠΟ ΑΝΟΙΧΤΟ ΔΟΧΕΙΟ

$$\boldsymbol{\upsilon_K = \sqrt{2gh}}$$

(με απόδειξη, σελ. 14 θεώρημα του Torricelli)

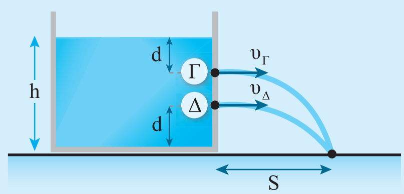
Β. ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΟΥ ΙΣΧΥΟΥΝ ΟΤΑΝ Η ΦΛΕΒΑ ΝΕΡΟΥ ΣΥΝΑΝΤΑ ΤΟ ΕΔΑΦΟΣ ΣΤΗ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗ ΔΥΝΑΤΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΠΟ ΤΗ ΒΑΣΗ ΤΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ



$$\boldsymbol{S_{max} = h,\quad d = \frac{h}{2},\quad \upsilon_\Gamma = \sqrt{gh},\quad \upsilon_\Delta = \sqrt{2gh},\quad \varphi = 45°}$$

Οι παραπάνω τύποι χρησιμοποιούνται πάντα με απόδειξη.

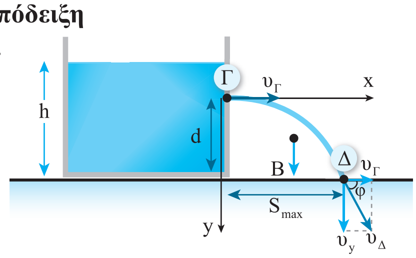
Γ. ΣΧΕΣΗ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΜΕ ΤΟ ΙΔΙΟ ΒΕΛΗΝΕΚΕΣ



Δύο τρύπες στο πλευρικό τοίχωμα ενός δοχείου που βρίσκονται στην ίδια απόσταση, η μία από την επιφάνεια του υγρού και η άλλη από τον πυθμένα, δημιουργούν φλέβες νερού που συναντούν το έδαφος στο ίδιο σημείο, δηλαδή έχουν το ίδιο βεληνεκές.

Απόδειξη

Β.



Σύμφωνα με το θεώρημα του Torricelli, η ταχύτητα με την οποία ρέει το νερό από την τρύπα στο Γ είναι $\upsilon_\Gamma = \sqrt{2g\left(h-d\right)}$ (1). Το νερό βγαίνοντας από την τρύπα στο Γ κάνει οριζόντια βολή από ύψος d. Στον οριζόντιο άξονα Γ_x εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, ενώ στον κατακόρυφο άξονα Γ_y εκτελεί ελεύθερη πτώση. Οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση είναι:

$$\upsilon_x = \upsilon_\Gamma,\quad x = \upsilon_\Gamma t\ \ (2),\quad \upsilon_y = gt\ \ (3),\quad y = \frac{1}{2}gt^2\ \ (4)$$

Για το σημείο Δ έχουμε x = S και y = d.

$$(2) \xRightarrow{x\,=\,S} S = \upsilon_\Gamma t \Rightarrow t = \frac{S}{\upsilon_\Gamma}\quad (5)$$

$$(4) \xRightarrow{y\,=\,d} d = \frac{1}{2}gt^2 \xRightarrow{(5)} d = \frac{1}{2}g\frac{S^2}{\upsilon_\Gamma^2} \xRightarrow{(1)} d = \frac{gS^2}{4g\left(h-d\right)} \Rightarrow d = \frac{S^2}{4\left(h-d\right)} \Rightarrow S^2 = 4hd - 4d^2 \Rightarrow 4d^2 - 4hd + S^2 = 0\quad (6)$$

- Για να έχει πραγματικές λύσεις η δευτεροβάθμια εξίσωση με μεταβλητή το d, πρέπει η διακρίνουσά της να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός, δηλαδή $\Delta \geq 0 \Rightarrow \left(-4h\right)^2 - 4\cdot 4S^2 \geq 0 \Rightarrow 16h^2 - 16S^2 \geq 0 \Rightarrow 16S^2 \leq 16h^2 \Rightarrow S \leq h$, οπότε: $S_{max} = h$ (7).
- Θέτοντας στην (6) όπου $S = S_{max} = h$, έχουμε $4d^2 - 4hd + h^2 = 0 \Rightarrow \left(2d - h\right)^2 = 0 \Rightarrow 2d - h = 0 \Rightarrow 2d = h \Rightarrow d = \frac{h}{2}$ (8).
- $(1) \xRightarrow{(8)} \upsilon_\Gamma = \sqrt{2g\left(h - \frac{h}{2}\right)} \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{2g\frac{h}{2}} \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{gh}$ (9)
- $(5) \xRightarrow[(9)]{(7)} t = \frac{h}{\sqrt{gh}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{h}{g}}$ (10). Άρα $(3) \xRightarrow{(10)} \upsilon_y = g\sqrt{\frac{h}{g}} \Rightarrow \upsilon_y = \sqrt{gh}$ (11)

Είναι $\upsilon_\Delta = \sqrt{\upsilon_\Gamma^2 + \upsilon_y^2} \xRightarrow[(11)]{(9)} \sqrt{gh + gh} = \sqrt{2gh} \Rightarrow \upsilon_\Delta = \sqrt{2gh}$.

Δείτε το και κάπως διαφορετικά

1ος τρόπος

Έστω ένα μόριο του νερού μάζας m που κινείται κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής μεταξύ των θέσεων Γ, Δ που απέχουν κατακόρυφα $d = \frac{h}{2}$ (8). Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ των θέσεων Γ, Δ, έχουμε:

$$\text{Θ.Μ.Κ.Ε. (Γ, Δ): } \Delta K = \Sigma W \Rightarrow K_{τελ.(Δ)} - K_{αρχ.(Γ)} = W_B \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_\Delta^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_\Gamma^2 = +mgd \overset{(8)}{\Longrightarrow}$$

$$\upsilon_\Delta^2 - \upsilon_\Gamma^2 = gh \Rightarrow \upsilon_\Delta = \sqrt{\upsilon_\Gamma^2 + gh} \overset{(9)}{\Longrightarrow} \upsilon_\Delta = \sqrt{2gh}$$

2ος τρόπος

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία Γ, Δ, έχουμε:

$$p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 + \rho g y_1 = p_\Delta + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Delta^2 + \rho g y_2 \quad (12)$$

Θεωρώντας τη στάθμη του σημείου Δ στάθμη αναφοράς για τη μέτρηση των υψών, έχουμε $y_1 = d = \frac{h}{2}$ (8) και $y_2 = 0$. Τα σημεία Γ, Δ είναι εκτεθειμένα στην ατμόσφαιρα, οπότε η πίεσή τους είναι η ατμοσφαιρική, δηλαδή $p_\Gamma = p_\Delta = p_{at}$ (13).

$$\text{Άρα (12)} \overset{(13)}{\Longrightarrow} p_{at} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 + \rho g\frac{h}{2} = p_{at} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Delta^2 + 0 \Rightarrow \upsilon_\Delta^2 = \upsilon_\Gamma^2 + gh \overset{(9)}{\Longrightarrow}$$

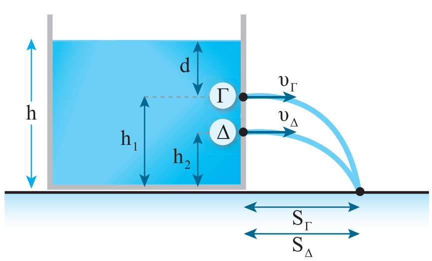
$$\upsilon_\Delta^2 = 2gh \Rightarrow \upsilon_\Delta = \sqrt{2gh}.$$

Παρατήρηση

Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Κ.Ε. και την εξίσωση του Bernoulli, καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Αυτό είναι λογικό, αφού η εξίσωση του Bernoulli αποτελεί έκφραση της αρχής της διατήρησης της ενέργειας στη ροή των ρευστών.

- Από (9), (11) έχουμε $\upsilon_\Gamma = \upsilon_y = \sqrt{gh}$, οπότε $\varphi = 45°$.

Γ.



Σύμφωνα με το θεώρημα του Torricelli, η ταχύτητα με την οποία ρέει το νερό από την τρύπα στο Γ είναι $\upsilon_\Gamma = \sqrt{2g(h - h_1)}$ (1).

Το νερό βγαίνοντας από το Γ κάνει οριζόντια βολή από ύψος h_1. Στον οριζόντιο άξονα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, ενώ στον κατακόρυφο άξονα εκτελεί ελεύθερη πτώση, οπότε:

$$x_\Gamma = S_\Gamma = \upsilon_\Gamma t_\Gamma \quad (2) \text{ και } y_\Gamma = h_1 = \frac{1}{2}gt_\Gamma^2 \Rightarrow t_\Gamma = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \quad (3)$$

$$(2) \underset{(3)}{\overset{(1)}{\Longrightarrow}} S_\Gamma = \sqrt{2g(h - h_1)} \cdot \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \Rightarrow S_\Gamma = 2\sqrt{h_1(h - h_1)} \quad (4)$$

Ακολουθώντας όμοια διαδικασία για το σημείο (Δ), έχουμε $S_\Delta = 2\sqrt{h_2(h - h_2)}$ (5).

Οι δύο φλέβες συναντούν το έδαφος στο ίδιο σημείο, οπότε:

$$S_\Gamma = S_A \underset{(5)}{\overset{(4)}{\Longrightarrow}} 2\sqrt{h_1(h - h_1)} = 2\sqrt{h_2(h - h_2)} \Rightarrow$$

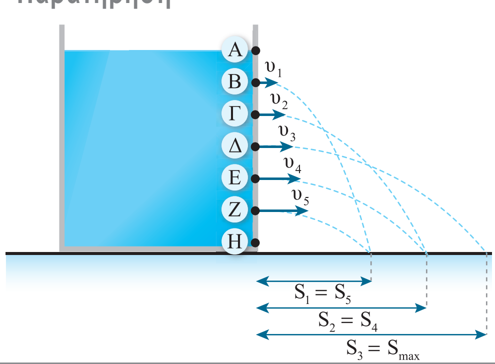
$$h_1(h - h_1) = h_2(h - h_2) \Rightarrow h_1h - h_1^2 = h_2h - h_2^2 \Rightarrow$$

$$h_1h - h_2h = h_1^2 - h_2^2 \Rightarrow h(h_1 - h_2) = (h_1 - h_2)(h_1 + h_2) \Rightarrow$$

$h = h_1 + h_2$ (6). Είναι $h = h_1 + d$ (7).

Άρα από (6), (7) $\Rightarrow h_2 = d$.

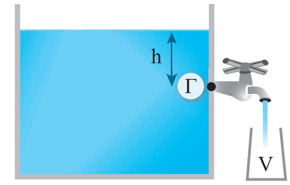
Παρατήρηση



- Είναι ΑΒ = ΖΗ, οπότε $S_1 = S_5$.
- Είναι ΑΓ = ΕΗ, οπότε $S_2 = S_4$.
- Είναι ΑΔ = ΔΗ, οπότε $S_3 = S_{max}$.

Εφαρμογές

1. Στην ανοιχτή δεξαμενή του διπλανού σχήματος περιέχεται νερό. Στο πλευρικό της τοίχωμα, σε βάθος $h = 1{,}25\ m$ από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, έχει βρύση διατομής $A = 2\ cm^2$. Πόσος χρόνος απαιτείται για να γεμίσουμε ένα δοχείο όγκου 5 L; Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.



Λύση

$h = 1{,}25\ m$, $A = 2\ cm^2 = 2 \cdot 10^{-4}\ m^2$, $V = 5\ L = 5 \cdot 10^{-3}\ m^3$, $g = 10\ m/s^2$, $t = ;$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Torricelli, η ταχύτητα με την οποία ρέει το νερό από τη βρύση είναι $\upsilon = \sqrt{2gh}$ (βλ. απόδειξη σελ. 14).

Άρα $\upsilon = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1{,}25}\ m/s \Rightarrow \upsilon = 5\ m/s$.

Η παροχή της βρύσης είναι $\Pi = A\upsilon$ (1). Επίσης για την παροχή έχουμε $\Pi = \dfrac{V}{t}$ (2).

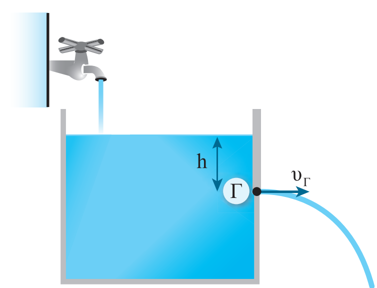
Από τους (1), (2) $\Rightarrow A\upsilon = \dfrac{V}{t} \Rightarrow t = \dfrac{V}{A\upsilon} \Rightarrow t = \dfrac{5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 5}\ s \Rightarrow \mathbf{t = 5\ s}$.

2. Στο δοχείο του διπλανού σχήματος περιέχεται νερό. Στο πλευρικό του τοίχωμα, σε βάθος $h = 1{,}8\ m$ από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, ανοίγουμε μια τρύπα εμβαδού $10\ cm^2$, ενώ ταυτόχρονα ανοίγουμε τη βρύση που έχει παροχή $4 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$.

α) Να αποδείξετε ότι η ελεύθερη επιφάνεια του νερού θα αρχίσει να κατεβαίνει.

β) Να βρείτε το βάθος h′ της τρύπας από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού όπου θα σταθεροποιηθεί ο όγκος του νερού που περιέχεται στο δοχείο.

Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.



Λύση

$h = 1{,}8\ m$, $A = 10\ cm^2 = 10 \cdot 10^{-4}\ m^2 = 10^{-3}\ m^2$, $\Pi_{βρ.} = 4 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$, $g = 10\ m/s^2$

α) ελεύθερη επιφάνεια κατεβαίνει;

Σύμφωνα με το θεώρημα του Torricelli, η ταχύτητα με την οποία ρέει το νερό από το άνοιγμα Γ είναι:

$\upsilon_Γ = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1{,}8}\ m/s = 6\ m/s \Rightarrow \upsilon_Γ = 6\ m/s$. Άρα η παροχή του ανοίγματος στο Γ είναι:

$\Pi_Γ = A\upsilon_Γ \Rightarrow \Pi_Γ = 6 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$. Η παροχή της βρύσης είναι $\Pi_{βρ.} = 4 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$. Έχουμε $\Pi_Γ > \Pi_{βρ.}$, οπότε το δοχείο αδειάζει πολύ αργά, με αποτέλεσμα **η ελεύθερη επιφάνεια (στάθμη) του νερού να κατεβαίνει με σχεδόν μηδενική ταχύτητα.**

β) $h' = ;$

Για να σταθεροποιηθεί ο όγκος του νερού που περιέχεται στο δοχείο, πρέπει να διατηρείται σταθερή η στάθμη του νερού, δηλαδή πρέπει *η παροχή της βρύσης να είναι ίση με την παροχή του ανοίγματος στο Γ.*

Άρα $\Pi_{βρ.} = \Pi'_Γ \Rightarrow \Pi_{βρ.} = A\upsilon'_Γ \Rightarrow \upsilon'_Γ = \dfrac{\Pi_{βρ.}}{A} \Rightarrow \upsilon'_Γ = \dfrac{4 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}}\ m/s \Rightarrow \upsilon'_Γ = 4\ m/s$.

Έχουμε $\upsilon'_Γ = \sqrt{2gh'} \Rightarrow \upsilon'^2_Γ = 2gh' \Rightarrow h' = \dfrac{\upsilon'^2_Γ}{2g} = \dfrac{4^2}{2 \cdot 10}\ m = 0{,}8\ m \Rightarrow \mathbf{h' = 0{,}8\ m}$.