ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ – ΕΡΓΟΥ – ΙΣΧΥΟΣ

Α. ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΣΤΗ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

$$K_{μετ.} = \frac{1}{2}Mυ_{cm}^2$$

M: η μάζα στερεού.
$υ_{cm}$: η ταχύτητα του κέντρου μάζας του στερεού.

ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

$$K_{περ.} = \frac{1}{2}Iω^2$$

I: η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον ακλόνητο άξονα περιστροφής του.
ω: η γωνιακή ταχύτητα του στερεού.

ΣΤΗ ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ

$$K = K_{μετ.} + K_{περ.}$$

$$K = \frac{1}{2}Mυ_{cm}^2 + \frac{1}{2}Iω^2$$

Το στερεό έχει κινητική ενέργεια λόγω της μεταφορικής κίνησής του και κινητική ενέργεια λόγω της στροφικής κίνησής του.

ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΩΜΑΤΩΝ

$$K_{συσ.} = K_1 + K_2 + \ldots$$

- K_1, K_2, … είναι οι κινητικές ενέργειες των σωμάτων που αποτελούν το σύστημα.
- Εάν όλα τα σώματα που αποτελούν το σύστημα των σωμάτων **είναι κολλημένα μεταξύ τους και περιστρέφονται ως ένα ενιαίο στερεό**, τότε:

$$K_{συσ.} = \frac{1}{2}I_{συσ.}ω^2$$

Β. ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

$$U = \pm Mgh$$

h: η κατακόρυφη απόσταση του κέντρου μάζας του στερεού από το οριζόντιο επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.

- Τα πρόσημα +, – χρησιμοποιούνται όταν το κέντρο μάζας του στερεού βρίσκεται πάνω ή κάτω, αντίστοιχα, από το επίπεδο της μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.
- Η βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός στερεού σώματος ή ενός συστήματος σωμάτων υπολογίζεται αφού πρώτα έχουμε ορίσει το οριζόντιο επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας (η επιλογή είναι αυθαίρετη).
- Για ευκολία πράξεων, ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας ενός στερεού σώματος θέτουμε το χαμηλότερο επίπεδο από το οποίο διέρχεται το κέντρο μάζας του στερεού σώματος.

ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΩΜΑΤΩΝ

$$U_{συσ.} = U_1 + U_2 + \ldots$$

- U_1, U_2, … είναι οι δυναμικές ενέργειες των σωμάτων που αποτελούν το σύστημα.

Γ. ΕΡΓΟ W – ΙΣΧΥΣ P ΣΤΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

1. ΕΡΓΟ W ΜΙΑΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΟΤΑΝ Η ΡΟΠΗ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΕΙΝΑΙ ΣΤΑΘΕΡΗ

Εκφράζεται ως
- έργο δύναμης
- έργο ροπής δύναμης
- έργο σταθερής ροπής

$$W = τθ$$

τ: η αλγεβρική τιμή της σταθερής ροπής.
θ: η γωνία στροφής σε rad.

- Όταν τ > 0, τότε W > 0, οπότε η δύναμη μέσω του έργου της W αυξάνει την κινητική ενέργεια του στερεού λόγω περιστροφής.
- Όταν τ < 0, τότε W < 0, οπότε η δύναμη μέσω του έργου της W ελαττώνει την κινητική ενέργεια του στερεού λόγω περιστροφής.

2. ΣΤΙΓΜΙΑΙΑ ΙΣΧΥΣ P_F ΔΥΝΑΜΗΣ

Εκφράζεται ως
- στιγμιαία ισχύς δύναμης
- στιγμιαία ισχύς ροπής δύναμης
- ρυθμός μεταβολής του έργου της δύναμης
- ρυθμός μεταβολής του έργου της ροπής

$$P_F = \frac{dW_F}{dt} = τ_F ω$$

$τ_F$: η αλγεβρική τιμή της ροπής της δύναμης.
ω: η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας.

3. ΜΕΣΗ ΙΣΧΥΣ $\overline{P}_F$ ΔΥΝΑΜΗΣ

Εκφράζεται ως
- μέση ισχύς δύναμης
- μέση ισχύς ροπής δύναμης
- μέσος ρυθμός μεταβολής του έργου της δύναμης
- μέσος ρυθμός μεταβολής του έργου της ροπής

$$\overline{P}_F = \frac{W_F}{Δt}$$

W_F: το συνολικό έργο που προσφέρει η δύναμη σε χρόνο Δt.

4. ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΕΝΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

$$\frac{dK_{περ.}}{dt} = Στ \cdot ω$$

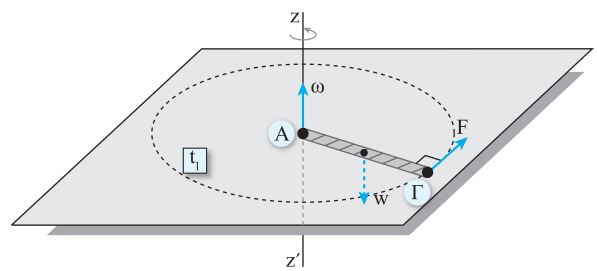
Στ: το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των δυνάμεων που δρουν στο στερεό.
ω: η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Π.1 ΟΤΑΝ ΤΟ ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ ΕΚΤΕΛΕΙ ΜΟΝΟ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Εφαρμογές

1. Η ομογενής ράβδος ΑΓ του σχήματος έχει μάζα $m = 3\,kg$, μήκος $\ell = 2\,m$ και περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α. Στη ράβδο ασκείται διαρκώς μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, η οποία έχει σταθερό μέτρο $F = 10\,N$ και είναι διαρκώς κάθετη στη ράβδο στο άκρο της Γ. Κάποια χρονική στιγμή t_1 το μέτρο της γωνιακής της ταχύτητας είναι $\omega = 4\,rad/s$. Να βρείτε:



α) την κινητική ενέργεια της ράβδου τη χρονική στιγμή t_1
β) το έργο της δύναμης F όταν η γωνία στροφής είναι $\theta = 2\pi\,rad$
γ) την ισχύ της δύναμης F τη χρονική στιγμή t_1
δ) τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου τη χρονική στιγμή t_1.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I_\rho = \frac{1}{3}m\ell^2$.

Λύση

$m = 3\,kg$, $\ell = 2\,m$, $F = 10\,N$, $\omega = 4\,rad/s$, $I_\rho = \frac{1}{3}m\ell^2$

α) $K = ;$ **ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Α**

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I_\rho = \frac{1}{3}m\ell^2 = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 2^2\ kg{\cdot}m^2 = 4\,kg{\cdot}m^2$.

Η ράβδος εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση, οπότε $K = \frac{1}{2}I_\rho\omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4^2\ J \Rightarrow \mathbf{K = 32\ J}$.

β) $\theta = 2\pi\,rad$, $W_F = ;$ **ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Γ.1**

Η δύναμη $\vec{F}$ δημιουργεί σταθερή ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής.
Η δύναμη $\vec{F}$ έχει μόνο περιστροφικό ρόλο και συγκεκριμένα βοηθάει στην περιστροφική κίνηση της ράβδου, οπότε:
$W_F = \tau_F\theta = +F\ell\theta = +10\cdot 2\cdot 2\pi\ J = +40\pi\ J \Rightarrow \mathbf{W_F = +40\pi\ J}$
Το θετικό πρόσημο δείχνει ότι η δύναμη F μέσω του έργου της μεταφέρει ενέργεια στη ράβδο αυξάνοντας την κινητική ενέργειά της λόγω περιστροφής.

γ) $P_F = ;$ **ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Γ.2**

Η ισχύς της F τη χρονική στιγμή t_1 (στιγμιαία ισχύς) είναι $P_F = \tau_F\omega = +F\ell\omega = +10\cdot 2\cdot 4\ W = +80\ W \Rightarrow \mathbf{P_F = +80\ W}$.

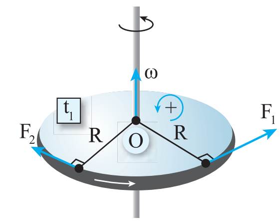
δ) $\frac{dK_{περ.}}{dt} = ;$ **ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Γ.4**

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου είναι $\frac{dK_{περ.}}{dt} = \Sigma\tau\cdot\omega$ (1).

Στη ράβδο ασκούνται το βάρος της $\vec{w}$ που είναι παράλληλο στον άξονα περιστροφής zz′, οπότε έχει ροπή μηδέν, η δύναμη $\vec{F}_{άξ.}$ από τον άξονα περιστροφής η οποία διέρχεται από τον άξονα περιστροφής, οπότε έχει ροπή μηδέν, και η δύναμη $\vec{F}$.
Είναι $\Sigma\tau_A = \tau_{w(A)} + \tau_{F_{άξ.}(A)} + \tau_{F(A)} = 0 + 0 + F\ell = F\ell \Rightarrow \Sigma\tau_A = F\ell$ (2).

$(1) \overset{(2)}{\Longrightarrow} \frac{dK_{περ.}}{dt} = F\ell\omega = +10\cdot 2\cdot 4\ W = +80\ W \Rightarrow \mathbf{\frac{dK_{περ.}}{dt} = +80\ W}$

2. **Ένας οριζόντιος ομογενής δίσκος μάζας $m = 4\,kg$ και ακτίνας $R = 1\,m$ περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του O. Ο δίσκος δέχεται εφαπτομενικά στην περιφέρειά του δύο σταθερές κατά μέτρο δυνάμεις $F_1 = 10\,N$ και $F_2 = 4\,N$. Κάποια χρονική στιγμή t_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου είναι $\omega = 10\,rad/s$. Να βρείτε:**



α) την κινητική ενέργεια του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1
β) τα έργα των ροπών των δυνάμεων F_1, F_2, όταν η γωνία στροφής είναι $\theta = 4\pi\,rad$
γ) την ισχύ της ροπής της δύναμης F_1 και τον ρυθμό μεταβολής του έργου της δύναμης F_2 τη χρονική στιγμή t_1
δ) τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1.
Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = \frac{1}{2}mR^2$.

Λύση

$m = 4\,kg$, $R = 1\,m$, $F_1 = 10\,N$, $F_2 = 4\,N$, $\omega = 10\,rad/s$, $I = \frac{1}{2}mR^2$

α) $K = ;$ **ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Α**

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1^2\,kg{\cdot}m^2 = 2\,kg{\cdot}m^2$.

Ο δίσκος εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση, οπότε $K = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10^2\,J \Rightarrow \mathbf{K = 100\,J}$.

β) $\theta = 4\pi\,rad$, $W_{F_1} = ;$, $W_{F_2} = ;$ **ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Γ.1**

- *Η δύναμη $\vec{F}_1$ δημιουργεί σταθερή ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής.*
  Η δύναμη $\vec{F}_1$ έχει μόνο περιστροφικό ρόλο και συγκεκριμένα βοηθάει στην περιστροφική κίνηση του δίσκου, οπότε:
  $W_{F_1} = \tau_{F_1}\theta = +F_1R\theta = +10\cdot 1\cdot 4\pi\,J = +40\pi\,J \Rightarrow \mathbf{W_{F_1} = +40\pi\,J}$
- *Η δύναμη $\vec{F}_2$ δημιουργεί σταθερή ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής.*
  Η δύναμη $\vec{F}_2$ έχει μόνο περιστροφικό ρόλο και συγκεκριμένα αντιστέκεται στην περιστροφική κίνηση του δίσκου, οπότε:
  $W_{F_2} = \tau_{F_2}\theta = -F_2R\theta = -4\cdot 1\cdot 4\pi\,J = -16\pi\,J \Rightarrow \mathbf{W_{F_2} = -16\pi\,J}$
- Το θετικό πρόσημο στο έργο της F_1 δείχνει ότι η δύναμη F_1 μέσω του έργου της μεταφέρει ενέργεια στον δίσκο, τείνοντας να αυξήσει την κινητική ενέργειά του λόγω περιστροφής.
- Το αρνητικό πρόσημο στο έργο της F_2 δείχνει ότι η δύναμη F_2 μέσω του έργου της αφαιρεί ενέργεια από τον δίσκο, τείνοντας να μειώσει την κινητική ενέργειά του λόγω περιστροφής.

Προσοχή: Είναι $W_{ολ.} = W_{F_1} + W_{F_2} = +40\pi\,J - 16\pi\,J = +24\pi\,J$.
Άρα συνολικά μέσω των έργων όλων των δυνάμεων μεταφέρεται ενέργεια στον δίσκο, οπότε αυξάνεται η κινητική του ενέργεια λόγω περιστροφής.

γ) $P_{F_1} = ;$, $\frac{dW_{F_2}}{dt} = P_{F_2} = ;$ **ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Γ.2**

- Η ισχύς της F_1 τη χρονική στιγμή t_1 (στιγμιαία ισχύς) είναι $P_{F_1} = \tau_{F_1}\omega = +F_1R\omega = +100\,W \Rightarrow \mathbf{P_{F_1} = +100\,W}$.
- Η ισχύς της F_2 τη χρονική στιγμή t_2 (στιγμιαία ισχύς) είναι $P_{F_2} = \tau_{F_2}\omega = -F_2R\omega = -40\,W \Rightarrow \mathbf{P_{F_2} = -40\,W}$.

δ) $\frac{dK_{περ.}}{dt} = ;$ **ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Γ.4**

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου είναι $\frac{dK_{περ.}}{dt} = \Sigma\tau\cdot\omega$ (1).

Στον δίσκο ασκούνται:
- η δύναμη από τον άξονα περιστροφής στο O και το βάρος $\vec{w}$ του δίσκου, των οποίων η ροπή είναι μηδέν
- οι εφαπτομενικές δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, που οι ροπές τους έχουν αντίθετη φορά.

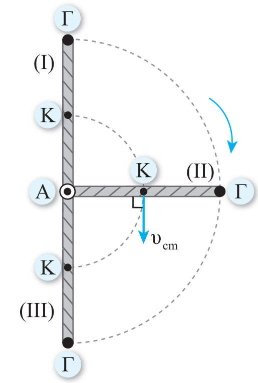
Είναι $\Sigma\tau_{(O)} = \tau_w + \tau_{F_{αξ.}} + \tau_{F_1} + \tau_{F_2} = 0 + 0 + F_1R - F_2R = \left(F_1 - F_2\right)R$ (2).

$(1) \overset{(2)}{\Longrightarrow} \frac{dK_{περ.}}{dt} = \left(F_1 - F_2\right)R\omega = \left(10 - 4\right)\cdot 1\cdot 10\,W = +60\,W \Rightarrow \mathbf{\frac{dK_{περ.}}{dt} = +60\,W}$

Παρατήρηση

$$\frac{dK_{περ.}}{dt} = P_{F_1} + P_{F_2}$$

3. Η λεπτή και ομογενής ράβδος ΑΓ του σχήματος έχει μάζα $m = 3\,kg$, μήκος $\ell = 2\,m$ και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α. Η ράβδος κατεβαίνοντας διέρχεται από την οριζόντια θέση της (θέση ΙΙ) με το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της να είναι $\upsilon_{cm} = 10\,m/s$.
α) Να βρείτε την κινητική ενέργεια της ράβδου στη θέση (ΙΙ)
β) Να βρείτε το έργο του βάρους κατά τη μετακίνηση της ράβδου από τη θέση (Ι) στη θέση (ΙΙ)
γ) Να βρείτε τη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας της ράβδου κατά τη μετακίνησή της από τη θέση (Ι) στη θέση (ΙΙ) και από τη θέση (Ι) στη θέση (ΙΙΙ).
Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο σε αυτήν που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12}m\ell^2$ και $g = 10\,m/s^2$.



Λύση

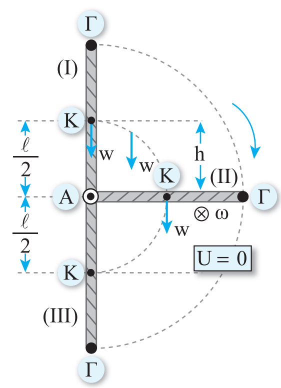
$m = 3\,kg$, $\ell = 2\,m$, $\upsilon_{cm} = 10\,m/s$, $I_{cm} = \frac{1}{12}m\ell^2$, $g = 10\,m/s^2$

α) $K = ;$ **ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Α**

- Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι:

$$I_\rho = I_{cm} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3}m\ell^2 = 4\,kg{\cdot}m^2$$

- Το κέντρο μάζας Κ εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας $AK = \frac{\ell}{2} = 1\,m$. Το μέτρο της γραμμικής του ταχύτητας υ_{cm} στη θέση (ΙΙ) είναι $\upsilon_{cm} = \omega \cdot (AK) \Rightarrow \omega = 10\,rad/s$.
- Η ράβδος εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση, οπότε $K = \frac{1}{2}I_\rho\omega^2 \Rightarrow \mathbf{K = 200\,J}$.



β) $W_{w(I,II)} = ;$

Κατά τη μετακίνηση της ράβδου από τη θέση (Ι) στη θέση (ΙΙ), η κατακόρυφη απόσταση h (η υψομετρική διαφορά) του κέντρου μάζας της Κ είναι $h = \frac{\ell}{2} = 1\,m$. *Το κέντρο μάζας της ράβδου κατεβαίνει, οπότε* $W_w = +mgh \Rightarrow W_w = +3 \cdot 10 \cdot 1\,J \Rightarrow \mathbf{W_w = +30\,J}$.

Σχόλιο

Κατά τη μετακίνηση ενός στερεού σώματος μεταξύ δύο θέσεων το έργο του βάρους είναι $W_w = \pm mgh$.
h: η κατακόρυφη απόσταση (η υψομετρική διαφορά) του κέντρου μάζας του σώματος μεταξύ των δύο θέσεων.
±: το (+) όταν το σώμα κατεβαίνει και το (–) όταν το σώμα ανεβαίνει.

- $W_{w(II,III)} = +mgh_{(II,III)} = +mg\frac{\ell}{2}$
- $W_{w(III,I)} = -mgh_{(III,I)} = -mg\ell$

γ) i) $\Delta U_{(I,II)} = ;$, **ii)** $\Delta U_{(I,III)} = ;$

Ορίζουμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο απ' όπου διέρχεται το κέντρο μάζας της ράβδου όταν αυτή βρίσκεται στη θέση (ΙΙΙ). Είναι $U_{(I)} = +mg\ell$, $U_{(II)} = +mg\frac{\ell}{2}$, $U_{(III)} = 0$.

i) $\Delta U_{(I,II)} = U_{τελ.(II)} - U_{αρχ.(I)} = +mg\frac{\ell}{2} - mg\ell = -mg\frac{\ell}{2} = -30\,J \Rightarrow \mathbf{\Delta U_{(I,II)} = -30\,J}$

ii) $\Delta U_{(I,III)} = U_{τελ.(III)} - U_{αρχ.(I)} = 0 - mg\ell = -mg\ell = -60\,J \Rightarrow \mathbf{\Delta U_{(I,III)} = -60\,J}$

Σχόλιο

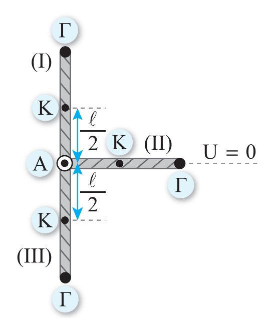
Αν ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας ορίσουμε το οριζόντιο επίπεδο απ' όπου διέρχεται το κέντρο μάζας της ράβδου όταν αυτή βρίσκεται στη θέση (ΙΙ), τότε:

$U_{(I)} = +mg\frac{\ell}{2}$, $U_{(II)} = 0$, $U_{(III)} = -mg\frac{\ell}{2}$

$\Delta U_{(I,II)} = U_{τελ.(II)} - U_{αρχ.(I)} = 0 - mg\frac{\ell}{2} = -mg\frac{\ell}{2} = -30\,J$

$\Delta U_{(I,III)} = U_{τελ.(III)} - U_{αρχ.(I)} = -mg\frac{\ell}{2} - mg\frac{\ell}{2} = -mg\ell = -60\,J$

Άρα στον υπολογισμό της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας δεν παίζει ρόλο η επιλογή του οριζόντιου επιπέδου της μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.



Ένας άλλος τρόπος είναι: *Η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι αντίθετη του έργου του βάρους, οπότε $\Delta U = -W_w$.*

- $\Delta U_{(I,II)} = -W_{w(I,II)} = -\left[+mgh_{(I,II)}\right] = -mg\frac{\ell}{2} = -30\,J$
- $\Delta U_{(I,III)} = -W_{w(I,III)} = -\left[+mgh_{(I,III)}\right] = -mg\ell = -60\,J$

Π.2 ΟΤΑΝ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΩΣ ΕΝΑ ΕΝΙΑΙΟ ΣΤΕΡΕΟ

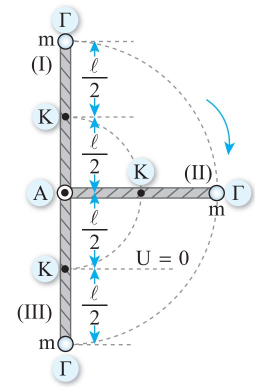
Εφαρμογές

1. Σημειακή σφαίρα μάζας $m = 0{,}5\,kg$ είναι κολλημένη στο άκρο Γ λεπτής και ομογενούς ράβδου ΑΓ μήκους $\ell = 2\,m$ και μάζας $M = 1{,}5\,kg$, η οποία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α. Να βρείτε:

α) την κινητική ενέργεια του συστήματος ράβδος-σφαίρα τη στιγμή που το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της σφαίρας είναι $\upsilon = 8\,m/s$

β) τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος στις θέσεις (Ι), (ΙΙ), (ΙΙΙ), εάν το επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι αυτό που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο σε αυτήν που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \dfrac{1}{12}M\ell^2$ και $g = 10\,m/s^2$.



Λύση

$m = 0{,}5\,kg$, $\ell = 2\,m$, $M = 1{,}5\,kg$, $g = 10\,m/s^2$, $I_{cm} = \dfrac{1}{12}M\ell^2$

α) $\upsilon = 8\,m/s$, $K_{συσ.} = ;$ **ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Α**

Τα σώματα που αποτελούν το σύστημα είναι κολλημένα μεταξύ τους και περιστρέφονται ως ένα ενιαίο στερεό, οπότε:

$K_{συσ.} = \dfrac{1}{2}I_{συσ.}\omega^2$ (1)

- Ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το άκρο Α της ράβδου που απέχει $\dfrac{\ell}{2}$ από το κέντρο μάζας της Κ. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Steiner, έχουμε:

  $I_\rho = I_{cm} + M\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{12}M\ell^2 + M\dfrac{\ell^2}{4} = \dfrac{1}{3}M\ell^2 = \dfrac{1}{3}\cdot 1{,}5\cdot 2^2\,kg{\cdot}m^2 = 2\,kg{\cdot}m^2$

  $I_{συσ.} = I_\rho + I_{σφ.} = I_\rho + m\ell^2 \Rightarrow I_{συσ.} = 4\,kg{\cdot}m^2$

- Η σφαίρα εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας $ΑΓ = \ell = 2\,m$. Για το μέτρο υ της γραμμικής της ταχύτητας ισχύει:

  $\upsilon = \omega\cdot(ΑΓ) \Rightarrow \upsilon = \omega\ell \Rightarrow \omega = \dfrac{\upsilon}{\ell} \Rightarrow \omega = 4\,rad/s$

Άρα (1) $\Rightarrow K_{συσ.} = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 4^2\,J \Rightarrow \mathbf{K_{συσ.} = 32\,J}$.

Ένας άλλος τρόπος είναι: *Η κινητική ενέργεια του συστήματος ράβδος-σφαίρα είναι $K_{συσ.} = K_\rho + K_{σφ.}$ (2), όπου K_ρ, $K_{σφ.}$ είναι οι κινητικές ενέργειες της ράβδου και της σφαίρας αντίστοιχα που αποτελούν το σύστημα.*

- *Η ράβδος εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση, οπότε* $K_\rho = \dfrac{1}{2}I_\rho\omega^2 = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 4^2\,J = 16\,J \Rightarrow K_\rho = 16\,J$.
- *Η σημειακή σφαίρα εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση* (συγκεκριμένα κυκλική κίνηση), *οπότε:*

  $K_{σφ.} = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 = \dfrac{1}{2}\cdot 0{,}5\cdot 8^2\,J = 16\,J \Rightarrow K_{σφ.} = 16\,J$

Άρα (2) $\Rightarrow \mathbf{K_{συσ.} = 32\,J}$.

β) $U_{συσ.(Ι)} = ;$, $U_{συσ.(ΙΙ)} = ;$, $U_{συσ.(ΙΙΙ)} = ;$ **ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Β**

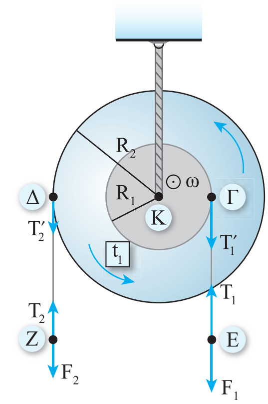
Η βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος σωμάτων είναι ίση με το άθροισμα των βαρυτικών δυναμικών ενεργειών των σωμάτων που αποτελούν το σύστημα, οπότε $U_{συσ.} = U_\rho + U_{σφ.}$ (3).

$U_{\rho(Ι)} = +Mg\ell = +30\,J$ $\quad U_{\rho(ΙΙ)} = +Mg\dfrac{\ell}{2} = +15\,J$ $\quad U_{\rho(ΙΙΙ)} = 0$

$U_{σφ.(Ι)} = +mg\cdot\dfrac{3\ell}{2} = +15\,J$ $\quad U_{σφ.(ΙΙ)} = +mg\dfrac{\ell}{2} = +5\,J$ $\quad U_{σφ.(ΙΙΙ)} = -mg\dfrac{\ell}{2} = -5\,J$

- (3) $\Rightarrow U_{συσ.(Ι)} = U_{\rho(Ι)} + U_{σφ.(Ι)} = +45\,J \Rightarrow \mathbf{U_{συσ.(Ι)} = +45\,J}$
- (3) $\Rightarrow U_{συσ.(ΙΙ)} = U_{\rho(ΙΙ)} + U_{σφ.(ΙΙ)} = +20\,J \Rightarrow \mathbf{U_{συσ.(ΙΙ)} = +20\,J}$
- (3) $\Rightarrow U_{συσ.(ΙΙΙ)} = U_{\rho(ΙΙΙ)} + U_{σφ.(ΙΙΙ)} = -5\,J \Rightarrow \mathbf{U_{συσ.(ΙΙΙ)} = -5\,J}$

2. Ένα σύστημα διπλής τροχαλίας αποτελείται από δύο κολλημένους δίσκους (1) και (2) που έχουν κοινό κέντρο Κ, ακτίνες $R_1 = 0{,}1\,m$ και $R_2 = 0{,}3\,m$ και μάζες $m_1 = 9\,kg$ και $m_2 = 1\,kg$ αντίστοιχα. Το σύστημα περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό άξονα, που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Γύρω από τους δίσκους είναι τυλιγμένα αβαρή και μη εκτατά νήματα, τα οποία δεν ολισθαίνουν πάνω στους δίσκους. Στα ελεύθερα άκρα των δύο νημάτων ασκούνται κατακόρυφες δυνάμεις σταθερών μέτρων $F_1 = 21\,N$ και $F_2 = 8{,}5\,N$. Κάποια χρονική στιγμή t_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος είναι $\omega = 10\,rad/s$, με την τροχαλία να περιστρέφεται αριστερόστροφα. Να βρείτε:



α) την κινητική ενέργεια του συστήματος τη χρονική στιγμή t_1

β) τα έργα των ροπών των τάσεων που ασκούν τα νήματα στους δύο δίσκους όταν η γωνία στροφής είναι $\theta = 20\pi$ rad

γ) την ισχύ των τάσεων που ασκούν τα νήματα στους δύο δίσκους τη χρονική στιγμή t_1

δ) τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της διπλής τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1.

Δίνεται η ροπή αδράνειας κάθε δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$.

Λύση

$R_1 = 0{,}1\,m$, $R_2 = 0{,}3\,m$, $m_1 = 9\,kg$, $m_2 = 1\,kg$, $F_1 = 21\,N$, $F_2 = 8{,}5\,N$, $\omega = 10\,rad/s$, $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$

α) $K_{συσ.} = ;$ **ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Α**

Οι δύο δίσκοι είναι κολλημένοι μεταξύ τους και περιστρέφονται ως ένα ενιαίο στερεό. Άρα $K_{συσ.} = \frac{1}{2}I_{συσ.}\omega^2$ (1).

Η ροπή αδράνειας του συστήματος της διπλής τροχαλίας είναι:

$$I_{συσ.} = I_{δ(1)} + I_{δ(2)} = \frac{1}{2}m_1R_1^2 + \frac{1}{2}m_2R_2^2 = 0{,}09\,kg\cdot m^2 \Rightarrow I_{συσ.} = 0{,}09\,kg\cdot m^2$$

$$(1) \Rightarrow K_{συσ.} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}09\cdot 10^2\,J \Rightarrow \mathbf{K_{συσ.} = 4{,}5\,J}$$

β) $\theta = 20\pi$ rad , $W_{T_1'} = ;$, $W_{T_2'} = ;$ **ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Γ.1**

Εφόσον τα νήματα είναι αβαρή, ισχύουν:

$\Sigma F_E = 0 \Rightarrow F_1 = T_1$ και $T_1 = T_1'$ (δράση-αντίδραση), οπότε $T_1 = T_1' = F_1 = 21\,N$.

$\Sigma F_Z = 0 \Rightarrow F_2 = T_2$ και $T_2 = T_2'$ (δράση-αντίδραση), οπότε $T_2 = T_2' = F_2 = 8{,}5\,N$.

- *Η τάση $\vec{T}_1'$ δημιουργεί σταθερή ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής.*
  Η τάση $\vec{T}_1'$ έχει μόνο περιστροφικό ρόλο και συγκεκριμένα αντιστέκεται στην περιστροφική κίνηση του συστήματος, οπότε:
  $W_{T_1'} = \tau_{T_1'}\theta = -T_1'R_1\theta = -21\cdot 0{,}1\cdot 20\pi\,J = -42\pi\,J \Rightarrow \mathbf{W_{T_1'} = -42\pi\,J}$
- *Η τάση $\vec{T}_2'$ δημιουργεί σταθερή ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής.*
  Η τάση $\vec{T}_2'$ έχει μόνο περιστροφικό ρόλο και συγκεκριμένα βοηθάει στην περιστροφική κίνηση του συστήματος, οπότε:
  $W_{T_2'} = \tau_{T_2'}\theta = +T_2'R_2\theta = +8{,}5\cdot 0{,}3\cdot 20\pi\,J = +51\pi\,J \Rightarrow \mathbf{W_{T_2'} = +51\pi\,J}$
- Το αρνητικό πρόσημο στο έργο της T_1' δείχνει ότι η δύναμη T_1' μέσω του έργου της αφαιρεί ενέργεια από το σύστημα, τείνοντας να μειώσει την κινητική ενέργειά του λόγω περιστροφής.
- Το θετικό πρόσημο στο έργο της T_2' δείχνει ότι η δύναμη T_2' μέσω του έργου της μεταφέρει ενέργεια στο σύστημα, τείνοντας να αυξήσει την κινητική ενέργειά του λόγω περιστροφής.

Προσοχή: Είναι $W_{ολ.} = W_{T_1'} + W_{T_2'} = -42\pi\,J + 51\pi\,J = +9\pi\,J$.

Άρα συνολικά μέσω των έργων όλων των δυνάμεων μεταφέρεται ενέργεια στο σύστημα, οπότε αυξάνεται η κινητική του ενέργεια λόγω περιστροφής.

γ) $P_{T_1'} = ;$, $P_{T_2'} = ;$ **ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Γ.2**

- Η ισχύς της T_1' τη χρονική στιγμή t_1 (στιγμιαία ισχύς) είναι:
  $P_{T_1'} = \tau_{T_1'}\omega = -T_1'R_1\omega = -21\cdot 0{,}1\cdot 10\,W = -21\,W \Rightarrow \mathbf{P_{T_1'} = -21\,W}$
- Η ισχύς της T_2' τη χρονική στιγμή t_1 (στιγμιαία ισχύς) είναι:
  $P_{T_2'} = \tau_{T_2'}\omega = +T_2'R_2\omega = +8{,}5\cdot 0{,}3\cdot 10\,W = +25{,}5\,W \Rightarrow \mathbf{P_{T_2'} = +25{,}5\,W}$

δ) $\dfrac{dK_{περ.}}{dt} = ;$ **ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Γ.4**

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας είναι $\dfrac{dK_{περ.}}{dt} = Στ \cdot ω$ (3).

Στη διπλή τροχαλία ασκούνται:

- η δύναμη από τον άξονα περιστροφής στο Κ και τα βάρη $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ των δύο δίσκων, των οποίων η ροπή είναι μηδέν
- οι τάσεις $\vec{T}_1'$, $\vec{T}_2'$, που οι ροπές τους έχουν αντίθετη φορά.

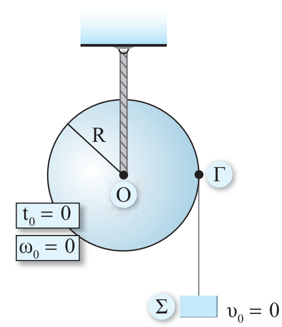
Είναι $Στ_{(K)} = τ_{w_1(K)} + τ_{w_2(K)} + τ_{F_{αξ.}(K)} + τ_{T_1'(K)} + τ_{T_2'(K)} = 0 + 0 + 0 - T_1'R_1 + T_2'R_2 = T_2'R_2 - T_1'R_1 \Rightarrow Στ_{(K)} = \left(T_2'R_2 - T_1'R_1\right)$ (4).

$$(3) \overset{(4)}{\Longrightarrow} \frac{dK_{περ.}}{dt} = \left(T_2'R_2 - T_1'R_1\right)ω = \left(8{,}5 \cdot 0{,}3 - 21 \cdot 0{,}1\right) \cdot 10 \text{ W} = +4{,}5 \text{ W} \Rightarrow \mathbf{\frac{dK_{περ.}}{dt} = +4{,}5 \text{ W}}$$

Π.3 ΣΩΜΑ ΠΟΥ ΕΚΤΕΛΕΙ ΜΟΝΟ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΗ ΓΩΝΙΑΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ $α_γ$ ΚΑΙ ΣΩΜΑ ΠΟΥ ΕΚΤΕΛΕΙ ΜΟΝΟ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ α

Εφαρμογή

Η ομογενής τροχαλία του διπλανού σχήματος, μάζας $M = 14$ kg και ακτίνας $R = 0{,}1$ m, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της χωρίς τριβές. Στο αυλάκι της τροχαλίας έχει τυλιχθεί αβαρές μη εκτατό νήμα, στο ελεύθερο άκρο του οποίου έχει δεθεί σώμα Σ μάζας $m = 3$ kg. Αρχικά κρατάμε την τροχαλία ακίνητη και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήνουμε την τροχαλία ελεύθερη, οπότε αυτή αρχίζει να περιστρέφεται με το νήμα να ξετυλίγεται χωρίς να γλιστρά στο αυλάκι της τροχαλίας. Να βρείτε:

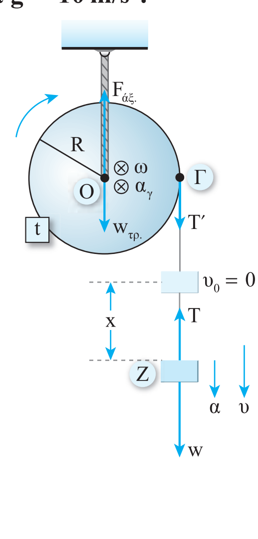


α) το μέτρο της επιτάχυνσης α του σώματος και το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης $α_γ$ της τροχαλίας
β) πόσο είναι το μέτρο της τάσης T του νήματος που δέχεται το σώμα Σ
γ) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s
δ) πόση είναι η κινητική ενέργεια του συστήματος τροχαλία-σώμα τη χρονική στιγμή t_1
ε) το έργο του βάρους του σώματος Σ και το έργο της τάσης που δέχεται η τροχαλία από το νήμα στη χρονική διάρκεια $0 \to t_1$
στ) τη χρονική στιγμή t_1:
i) την ισχύ του βάρους του σώματος Σ
ii) την ισχύ της τάσης του νήματος που δέχεται το Σ
iii) την ισχύ της τάσης του νήματος που δέχεται η τροχαλία
iv) τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ
v) τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \dfrac{1}{2}MR^2$ και $g = 10$ m/s².

Λύση

$M = 14$ kg, $R = 0{,}1$ m, $m = 3$ kg, $g = 10$ m/s², $I = \dfrac{1}{2}MR^2$



α) $α = ;$, $α_γ = ;$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο, οπότε:

- το σώμα Σ με την επίδραση του βάρους του $\vec{w}$ αρχίζει να κινείται προς τα κάτω με σταθερή επιτάχυνση μέτρου α
- η τροχαλία με την επίδραση της ροπής της $\vec{T}'$ αρχίζει να περιστρέφεται δεξιόστροφα με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $α_γ$

Στο σώμα Σ ασκούνται το βάρος του $\vec{w}$ και η τάση $\vec{T}$ του νήματος.

Στην τροχαλία ασκούνται το βάρος της $\vec{w}_{τρ.}$, η τάση $\vec{T}'$ του νήματος και η δύναμη $\vec{F}_{αξ.}$ που δέχεται από τον άξονα περιστροφής.

- εφόσον το νήμα είναι αβαρές, ισχύει $T = T'$ (δράση-αντίδραση)

- *εφόσον το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία, ισχύουν:*
  – *το μέτρο της ταχύτητας υ του σώματος Σ είναι ίσο με το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας* $\upsilon_{\gamma\rho.}$ *των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας, δηλαδή* $\upsilon = \upsilon_{\gamma\rho.} = \omega R$
  – *το μέτρο της επιτάχυνσης α του σώματος Σ είναι ίσο με το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης* α_ε *των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας, δηλαδή* $\alpha = \alpha_\varepsilon = \alpha_\gamma R$.

Συνοψίζοντας έχουμε:	*Το σώμα m εκτελεί μεταφορική κίνηση.*	*Η τροχαλία M εκτελεί περιστροφική κίνηση.*
$T = T'$ (1) $\upsilon = \omega R$ (2) $\alpha = \alpha_\gamma R$ (3)	$\Sigma F_Z = m\alpha \Rightarrow$ $w - T = m\alpha \Rightarrow$ $mg - T = m\alpha \Rightarrow$ $T = mg - m\alpha \Rightarrow$ $T = 30 - 3\alpha$ (4) Είναι $\begin{cases} \upsilon = \alpha t & (5) \\ x = \frac{1}{2}\alpha t^2 & (6) \end{cases}$	$\Sigma\tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow T'R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_\gamma \overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $T = \frac{1}{2}MR\alpha_\gamma \overset{(3)}{\Longrightarrow} T = \frac{1}{2}M\alpha \Rightarrow$ $T = 7\alpha$ (7) Είναι $\begin{cases} \omega = \alpha_\gamma t & (8) \\ \theta = \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2 & (9) \end{cases}$

- από (4), (7) $\Rightarrow 30 - 3\alpha = 7\alpha \Rightarrow 10\alpha = 30 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 3\ m/s^2}$.
- (3) $\Rightarrow \alpha = \alpha_\gamma R \Rightarrow \alpha_\gamma = \dfrac{\alpha}{R} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_\gamma = 30\ rad/s^2}$

β) $T = ;$

(4) $\Rightarrow T = \left(30 - 3\cdot 3\right) N \Rightarrow \boldsymbol{T = 21\ N}$

γ) $t_1 = 2\ s$, $\upsilon_1 = ;$, $\omega_1 = ;$

- (5) $\Rightarrow \upsilon_1 = \alpha t_1 \Rightarrow \upsilon_1 = 3\cdot 2\ m/s \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = 6\ m/s}$ • (8) $\Rightarrow \omega_1 = \alpha_\gamma t_1 \Rightarrow \omega_1 = 30\cdot 2\ rad/s \Rightarrow \boldsymbol{\omega_1 = 60\ rad/s}$

δ) $K_{\sigma\upsilon\sigma.} = ;$ **ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Α**

Η κινητική ενέργεια του συστήματος τροχαλία-σώμα Σ είναι ίση με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών της τροχαλίας και του σώματος Σ που αποτελούν το σύστημα, οπότε $K_{\sigma\upsilon\sigma.} = K_{\tau\rho.} + K_{\sigma\acute{\omega}\mu.}$ (10).

- *Η τροχαλία εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση, οπότε* $K_{\tau\rho.} = \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\omega_1^2 = \frac{1}{4}\cdot 14\cdot 0{,}1^2\cdot 60^2\ J = 126\ J$.
- *Το σώμα Σ εκτελεί μεταφορική κίνηση, οπότε* $K_{\sigma\acute{\omega}\mu.} = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6^2\ J = 54\ J$.

(10) $\Rightarrow \boldsymbol{K_{\sigma\upsilon\sigma.} = 180\ J}$

ε) $W_w = ;$, $W_{T'} = ;$ **ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Γ.1**

Στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_1 = 2\ s$ το σώμα Σ έχει μετατοπιστεί κατά x_1 και η τροχαλία έχει στραφεί κατά γωνία θ_1.

(6) $\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\alpha t_1^2 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2^2\ m = 6\ m \Rightarrow x_1 = 6\ m$ (9) $\Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2}\alpha_\gamma t_1^2 = \frac{1}{2}\cdot 30\cdot 2^2\ rad = 60\ rad \Rightarrow \theta_1 = 60\ rad$

- *Το βάρος* $\vec{w}$ *είναι δύναμη σταθερού μέτρου που μετακινεί ευθύγραμμα το σημείο εφαρμογής του στην ίδια κατεύθυνση, οπότε* $W_w = +wx_1 = +mgx_1 = +3\cdot 10\cdot 6\ J = +180\ J \Rightarrow \boldsymbol{W_w = +180\ J}$.
- *Η τάση* $\vec{T}'$ *δημιουργεί σταθερή ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής.*
  Η τάση $\vec{T}'$ *έχει μόνο περιστροφικό ρόλο και συγκεκριμένα βοηθάει στην περιστροφική κίνηση της τροχαλίας, οπότε:*
  $W_{T'} = \tau_{T'}\theta_1 = +T'R\theta_1 = +21\cdot 0{,}1\cdot 60\ J = +126\ J \Rightarrow \boldsymbol{W_{T'} = +126\ J}$

στ) i) $P_w = ;$, **ii)** $P_T = ;$, **iii)** $P_{T'} = ;$, **iv)** $\left(\dfrac{dK_{\sigma\acute{\omega}\mu.}}{dt}\right)_{t_1} = ;$, **v)** $\left(\dfrac{dK_{\tau\rho.}}{dt}\right)_{t_1} = ;$ **ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Γ.2**

- *Το σώμα Σ εκτελεί μεταφορική κίνηση, οπότε:*
  i) $P_w = +w\upsilon_1 = +mg\upsilon_1 = +3\cdot 10\cdot 6\ W = +180\ W \Rightarrow \boldsymbol{P_w = +180\ W}$
  ii) $P_T = -T\upsilon_1 = -21\cdot 6\ W = -126\ W \Rightarrow \boldsymbol{P_T = -126\ W}$
- *Η τροχαλία εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση, οπότε:*
  iii) $P_{T'} = \tau_{T'}\omega_1 = +T'R\omega_1 = +21\cdot 0{,}1\cdot 60\ W = +126\ W \Rightarrow \boldsymbol{P_{T'} = +126\ W}$

iv) $\left(\dfrac{dK_{\sigma\acute{\omega}\mu.}}{dt}\right)_{t_1} = \Sigma F\upsilon_1 = \left(w - T\right)\upsilon_1 = \left(mg - T\right)\upsilon_1 = \left(30 - 21\right)\cdot 6\ W = +54\ W \Rightarrow \boldsymbol{\left(\dfrac{dK_{\sigma\acute{\omega}\mu.}}{dt}\right)_{t_1} = +54\ W}$

v) $\left(\dfrac{dK_{\tau\rho.}}{dt}\right)_{t_1} = \Sigma\tau\cdot\omega_1 = +T'R\omega_1 = +21\cdot 0{,}1\cdot 60\ W = +126\ W \Rightarrow \boldsymbol{\left(\dfrac{dK_{\tau\rho.}}{dt}\right)_{t_1} = +126\ W}$

Π.4 ΟΤΑΝ ΤΟ ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ ΕΚΤΕΛΕΙ ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ

Α. ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ K

$$\mathbf{K = K_{μετ.} + K_{περ.}}$$

$$\mathbf{K = \frac{1}{2}Mυ_{cm}^2 + \frac{1}{2}Iω^2}$$

Β. ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ $\mathbf{\frac{dK}{dt}}$

$$\mathbf{\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{μετ.}}{dt} + \frac{dK_{περ.}}{dt}}$$

$$\mathbf{\frac{dK}{dt} = \pm ΣF_x υ_{cm} + Στ \cdot ω}$$

- Ο άξονας x′x έχει πάντα την κατεύθυνση της ταχύτητας $υ_{cm}$ του κέντρου μάζας του σώματος.
- $ΣF_x$ είναι το μέτρο της συνισταμένης δύναμης στον άξονα των x.
- Στ είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των δυνάμεων που δρουν στο στερεό.

Γ. ΕΡΓΟ $\mathbf{W_F}$ – ΙΣΧΥΣ $\mathbf{P_F}$ ΔΥΝΑΜΗΣ F

Όταν η δύναμη F έχει μόνο περιστροφικό ρόλο, και η ροπή της δύναμης ως προς τον άξονα περιστροφής είναι σταθερή:

$$\mathbf{W_{F(περ.)} = τ_F θ}$$

$$\mathbf{P_{F(περ.)} = τ_F ω}$$

Όταν η δύναμη F έχει μόνο μεταφορικό ρόλο, και είναι δύναμη σταθερού μέτρου:

$$\mathbf{W_{F(μετ.)} = \pm F_x x_{cm}}$$

$$\mathbf{P_{F(μετ.)} = \pm F_x υ_{cm}}$$

- Στον προσδιορισμό της ισχύος της δύναμης F δεν είναι απαραίτητο η ροπή της F ως προς τον άξονα περιστροφής να είναι σταθερή (στιγμιαίο μέγεθος).

Όταν η δύναμη F έχει μεταφορικό και περιστροφικό ρόλο:

$$\mathbf{W_F = W_{F(περ.)} + W_{F(μετ.)}}$$

$$\mathbf{P_F = P_{F(περ.)} + P_{F(μετ.)}}$$

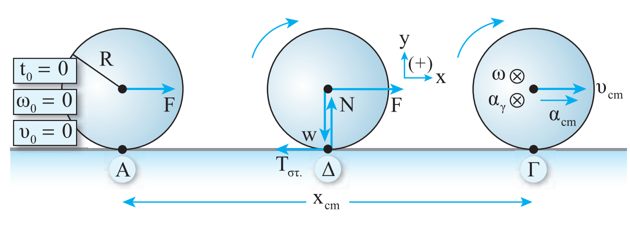
- Συνήθως προσπαθούμε να υπολογίσουμε τα W_F, P_F χωρίς να τα σπάσουμε σε δύο τμήματα.

- Όταν μια δύναμη F δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της, δηλαδή ασκείται συνεχώς σε σημείο που είναι κάθε στιγμή ακίνητο, δηλαδή ασκείται συνεχώς σε σημείο που έχει κάθε στιγμή ταχύτητα μηδέν, τότε:
  - για τη σύνθετη κίνηση συνολικά δεν παράγει έργο, οπότε $W_F = 0$.
  - κλασικό παράδειγμα αποτελεί η στατική τριβή σε στερεό σώμα που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, όπου $W_{T_{στ.}} = 0$.

Παραδείγματα

Στα παρακάτω παραδείγματα θα μελετήσουμε τις εξισώσεις που ισχύουν για το έργο, την ισχύ, την κινητική ενέργεια και τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τον δίσκο του εκάστοτε σχήματος. Σε όλα τα παραδείγματα ισχύουν τα εξής:
Ο δίσκος ξεκινά από την ηρεμία ($ω_0 = 0$, $υ_0 = 0$) εκτελώντας σύνθετη κίνηση, δηλαδή ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση γύρω από ελεύθερο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Όπου υπάρχει νήμα είναι αβαρές, μη εκτατό και ξετυλίγεται στον δίσκο χωρίς να γλιστρά. Όπου ο δίσκος δέχεται δύναμη $\vec{F}$, αυτή είναι δύναμη σταθερού μέτρου και σταθερής κατεύθυνσης. Η ροπή αδράνειας του ομογενούς δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του K και είναι κάθετος στο επίπεδό του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.

1. Έχουμε $υ_{cm} = ωR$ (1), $α_{cm} = α_γ R$ (2), $x_{cm} = Rθ$ (3).



α) Έργο

- Η δύναμη $\vec{F}$ έχει μόνο μεταφορικό ρόλο. Το σημείο εφαρμογής της (κέντρο μάζας του δίσκου) μετατοπίστηκε ευθύγραμμα κατά x_{cm}, οπότε $W_{F(A,Γ)} = +Fx_{cm}$.
- *Η στατική τριβή $\vec{T}_{στ.}$ δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της, αφού ασκείται συνεχώς στο σημείο επαφής του δίσκου με το δάπεδο, το οποίο κάθε στιγμή είναι ακίνητο ($υ_Δ = 0$).*

Άρα το έργο της στατικής τριβής κατά τη σύνθετη κίνηση είναι μηδέν, δηλαδή $W_{T_{στ.}} = 0$.

Δείτε το και κάπως διαφορετικά

Η στατική τριβή έχει μεταφορικό και περιστροφικό ρόλο.

Το έργο της στατικής τριβής κατά τη μεταφορική κίνηση είναι $W_{T_{\sigma\tau.}(\mu\varepsilon\tau.)} = -T_{\sigma\tau.}x_{cm}$.

Το έργο της στατικής τριβής κατά την περιστροφική κίνηση είναι $W_{T_{\sigma\tau.}(\pi\varepsilon\rho.)} = \tau_{T_{\sigma\tau.}}\theta = +T_{\sigma\tau.}R\theta \overset{(3)}{\Longrightarrow} W_{T_{\sigma\tau.}(\pi\varepsilon\rho.)} = +T_{\sigma\tau.}x_{cm}$.

Το πρόσημο (+) το βάζουμε διότι η $T_{\sigma\tau.}$ βοηθάει την περιστροφική κίνηση του δίσκου.

Είναι $W_{T_{\sigma\tau.}(A,\Gamma)} = W_{T_{\sigma\tau.}(\mu\varepsilon\tau.)} + W_{T_{\sigma\tau.}(\pi\varepsilon\rho.)} = -T_{\sigma\tau.}x_{cm} + T_{\sigma\tau.}x_{cm} = 0 \Rightarrow W_{T_{\sigma\tau.}} = 0$.

β) Ισχύς

- $P_{F(\Gamma)} = +F\upsilon_{cm}$
- $P_{T_{\sigma\tau.}(\Gamma)} = \dfrac{dW_{T_{\sigma\tau.}}}{dt} = 0 \quad \left(W_{T_{\sigma\tau.}} = 0\right)$

  Δείτε το και κάπως διαφορετικά

  $P_{T_{\sigma\tau.}(\Gamma)} = P_{T_{\sigma\tau.}(\pi\varepsilon\rho.)} + P_{T_{\sigma\tau.}(\mu\varepsilon\tau.)} = \tau_{T_{\sigma\tau.}}\omega - T_{\sigma\tau.}\upsilon_{cm} = +T_{\sigma\tau.}R\omega - T_{\sigma\tau.}\upsilon_{cm} \overset{(1)}{=} T_{\sigma\tau.}\upsilon_{cm} - T_{\sigma\tau.}\upsilon_{cm} = 0 \Rightarrow P_{T_{\sigma\tau.}(\Gamma)} = 0$

γ) Κινητική ενέργεια

$$K = K_{\mu\varepsilon\tau.} + K_{\pi\varepsilon\rho.} = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\omega^2 \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{4}M\upsilon_{cm}^2 = \frac{3}{4}M\upsilon_{cm}^2$$

Είναι $K = \dfrac{3}{4}M\upsilon_{cm}^2$, με $K_{\mu\varepsilon\tau.} = \dfrac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2$ και $K_{\pi\varepsilon\rho.} = \dfrac{1}{4}M\upsilon_{cm}^2$, οπότε $K_{\mu\varepsilon\tau.} = 2K_{\pi\varepsilon\rho.}$.

δ) Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας

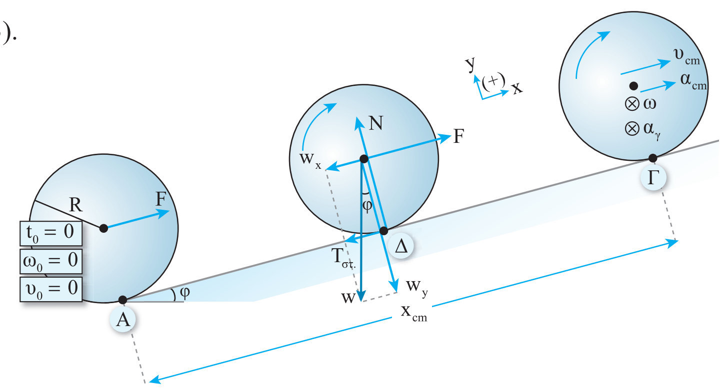
$$\frac{dK_{\pi\varepsilon\rho.}}{dt} = \Sigma\tau\cdot\omega = +T_{\sigma\tau.}R\omega \overset{(1)}{=} +T_{\sigma\tau.}\upsilon_{cm} \Rightarrow \frac{dK_{\pi\varepsilon\rho.}}{dt} = +T_{\sigma\tau.}\upsilon_{cm}$$

$$\frac{dK_{\mu\varepsilon\tau.}}{dt} = +\Sigma F_x\upsilon_{cm} = +\left(F - T_{\sigma\tau.}\right)\upsilon_{cm} \Rightarrow \frac{dK_{\mu\varepsilon\tau.}}{dt} = +\left(F - T_{\sigma\tau.}\right)\upsilon_{cm}$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{\pi\varepsilon\rho.}}{dt} + \frac{dK_{\mu\varepsilon\tau.}}{dt} = +T_{\sigma\tau.}\upsilon_{cm} + \left(F - T_{\sigma\tau.}\right)\upsilon_{cm} = +F\upsilon_{cm} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = +F\upsilon_{cm}$$

2. Έχουμε $\upsilon_{cm} = \omega R$ (1), $\alpha_{cm} = \alpha_\gamma R$ (2), $x_{cm} = R\theta$ (3).

α) Έργο



- Η δύναμη $\vec{F}$ και το βάρος $\vec{w}$ έχουν μεταφορικό ρόλο. Το σημείο εφαρμογής τους (κέντρο μάζας του δίσκου) μετατοπίστηκε ευθύγραμμα κατά x_{cm}, οπότε:

  – $W_{F(A,\Gamma)} = +Fx_{cm}$

  – $W_{w(A,\Gamma)} = W_{w_x(A,\Gamma)} + W_{w_y(A,\Gamma)} =$
  $= -w_x x_{cm} + 0 = -Mg\cdot\eta\mu\varphi\cdot x_{cm} \Rightarrow$
  $W_{w(A,\Gamma)} = -Mg\cdot\eta\mu\varphi\cdot x_{cm}$

- *Η στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau.}$ δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της, αφού ασκείται συνεχώς στο σημείο επαφής του δίσκου με το δάπεδο, το οποίο κάθε στιγμή είναι ακίνητο ($\upsilon_\Delta = 0$). Άρα το έργο της στατικής τριβής κατά τη σύνθετη κίνηση είναι μηδέν, δηλαδή $W_{T_{\sigma\tau.}} = 0$.*

  Δείτε το και κάπως διαφορετικά

  Η στατική τριβή έχει μεταφορικό και περιστροφικό ρόλο.

  Το έργο της στατικής τριβής κατά τη μεταφορική κίνηση είναι $W_{T_{\sigma\tau.}(\mu\varepsilon\tau.)} = -T_{\sigma\tau.}x_{cm}$.

  Το έργο της στατικής τριβής κατά την περιστροφική κίνηση είναι $W_{T_{\sigma\tau.}(\pi\varepsilon\rho.)} = \tau_{T_{\sigma\tau.}}\theta = +T_{\sigma\tau.}R\theta \overset{(3)}{\Longrightarrow} W_{T_{\sigma\tau.}(\pi\varepsilon\rho.)} = +T_{\sigma\tau.}x_{cm}$.

  Το πρόσημο (+) το βάζουμε διότι η $T_{\sigma\tau.}$ βοηθάει την περιστροφική κίνηση του δίσκου.

  Είναι $W_{T_{\sigma\tau.}(A,\Gamma)} = W_{T_{\sigma\tau.}(\mu\varepsilon\tau.)} + W_{T_{\sigma\tau.}(\pi\varepsilon\rho.)} = -T_{\sigma\tau.}x_{cm} + T_{\sigma\tau.}x_{cm} = 0 \Rightarrow W_{T_{\sigma\tau.}} = 0$.

β) Ισχύς

- $P_{F(\Gamma)} = +F\upsilon_{cm}$, $P_{w(\Gamma)} = P_{w_x(\Gamma)} + P_{w_y(\Gamma)} = -w_x\upsilon_{cm} + 0 = -Mg\cdot\eta\mu\varphi\cdot\upsilon_{cm} \Rightarrow P_{w(\Gamma)} = -Mg\cdot\eta\mu\varphi\cdot\upsilon_{cm}$
- $P_{T_{\sigma\tau.}(\Gamma)} = \dfrac{dW_{T_{\sigma\tau.}}}{dt} = 0 \quad \left(W_{T_{\sigma\tau.}} = 0\right)$

γ) Κινητική ενέργεια

$$K = K_{\mu\varepsilon\tau.} + K_{\pi\varepsilon\rho.} = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\omega^2 \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{4}M\upsilon_{cm}^2 = \frac{3}{4}M\upsilon_{cm}^2$$

Είναι $K = \dfrac{3}{4}M\upsilon_{cm}^2$, με $K_{\mu\varepsilon\tau.} = \dfrac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2$ και $K_{\pi\varepsilon\rho.} = \dfrac{1}{4}M\upsilon_{cm}^2$, οπότε $K_{\mu\varepsilon\tau.} = 2K_{\pi\varepsilon\rho.}$.

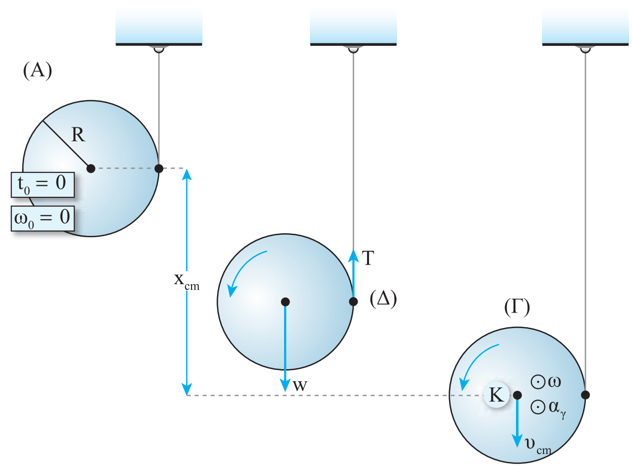
δ) Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας

$$\frac{dK_{περ.}}{dt} = Στ \cdot ω = +T_{στ.}Rω \overset{(1)}{=} +T_{στ.}υ_{cm} \Rightarrow \frac{dK_{περ.}}{dt} = +T_{στ.}υ_{cm}$$

$$\frac{dK_{μετ.}}{dt} = +ΣF_x υ_{cm} = +\left(F - w_x - T_{στ.}\right)υ_{cm} \Rightarrow \frac{dK_{μετ.}}{dt} = +\left(F - w_x - T_{στ.}\right)υ_{cm}$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{περ.}}{dt} + \frac{dK_{μετ.}}{dt} = +T_{στ.}υ_{cm} + \left(F - Mg \cdot ημφ - T_{στ.}\right)υ_{cm} = +\left(F - Mg \cdot ημφ\right)υ_{cm} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = +\left(F - Mg \cdot ημφ\right)υ_{cm}$$

3. Έχουμε $υ_{cm} = ωR$ (1), $α_{cm} = α_γ R$ (2), $x_{cm} = Rθ$ (3).



α) Έργο

- $W_{w(A \to Γ)} = +mgx_{cm}$
- *Η τάση $\vec{T}$ του νήματος δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της, αφού ασκείται συνεχώς στο σημείο Δ, το οποίο κάθε στιγμή είναι ακίνητο ($υ_Δ = 0$).*
  Άρα το έργο της τάσης κατά τη σύνθετη κίνηση είναι μηδέν, δηλαδή $W_T = 0$.
  Δείτε το και κάπως διαφορετικά
  Η τάση του νήματος έχει μεταφορικό και περιστροφικό ρόλο.
  Το έργο της τάσης του νήματος κατά τη μεταφορική κίνηση είναι $W_{T(μετ.)} = -Tx_{cm}$.
  Το έργο της τάσης του νήματος κατά την περιστροφική κίνηση είναι $W_{T(περ.)} = τ_T θ = +T_{στ.}Rθ \overset{(3)}{\Longrightarrow} W_{T(περ.)} = +T x_{cm}$.
  Το πρόσημο (+) το βάζουμε διότι η T βοηθάει την περιστροφική κίνηση του δίσκου.
  Είναι $W_{T(A,Γ)} = W_{T(μετ.)} + W_{T(περ.)} = -Tx_{cm} + Tx_{cm} = 0 \Rightarrow W_{T(A,Γ)} = 0$.

β) Ισχύς

- $P_{w(Γ)} = +wυ_{cm} = +Mgυ_{cm} \Rightarrow P_{w(Γ)} = +Mgυ_{cm}$
- $P_{T(Γ)} = \dfrac{dW_T}{dt} = 0 \quad \left(W_T = 0\right)$

  Δείτε το και κάπως διαφορετικά

  $P_{T(Γ)} = P_{T(περ.)} + P_{T(μετ.)} = τ_T ω - Tυ_{cm} = +TRω - Tυ_{cm} \overset{(1)}{=} Tυ_{cm} - Tυ_{cm} = 0 \Rightarrow P_{T(Γ)} = 0$

γ) Κινητική ενέργεια

$$K = K_{μετ.} + K_{περ.} = \frac{1}{2}Mυ_{cm}^2 + \frac{1}{2}Iω^2 = \frac{1}{2}Mυ_{cm}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}MR^2ω^2 \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}Mυ_{cm}^2 + \frac{1}{4}Mυ_{cm}^2 = \frac{3}{4}Mυ_{cm}^2$$

Είναι $K = \frac{3}{4}Mυ_{cm}^2$, με $K_{μετ.} = \frac{1}{2}Mυ_{cm}^2$ και $K_{περ.} = \frac{1}{4}Mυ_{cm}^2$, οπότε $K_{μετ.} = 2K_{περ.}$.

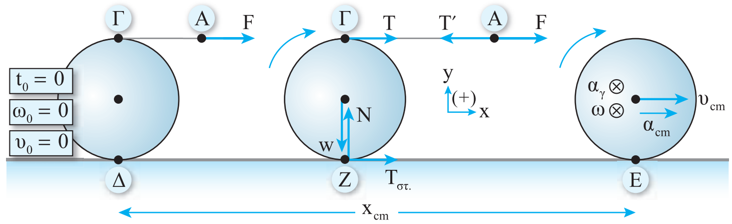
δ) Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας

$$\frac{dK_{περ.}}{dt} = Στ \cdot ω = +TRω \overset{(1)}{=} +Tυ_{cm} \Rightarrow \frac{dK_{περ.}}{dt} = +Tυ_{cm}$$

$$\frac{dK_{μετ.}}{dt} = +ΣF_x υ_{cm} = +\left(w - T\right)υ_{cm} = +\left(Mg - T\right)υ_{cm} \Rightarrow \frac{dK_{μετ.}}{dt} = +\left(Mg - T\right)υ_{cm}$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{περ.}}{dt} + \frac{dK_{μετ.}}{dt} = +Tυ_{cm} + \left(Mg - T\right)υ_{cm} = +Mgυ_{cm} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = +Mgυ_{cm}$$

4. Βλέπε πρώτα λυμένο πρόβλημα 17, σελ. 203 (Β΄ τόμος).



Έχουμε $\upsilon_{cm} = \omega R$ (1), $\alpha_{cm} = \alpha_\gamma R$ (2), $x_{cm} = R\theta$ (3), $\upsilon_A = 2\upsilon_{cm}$ (4), $\alpha_A = 2\alpha_{cm}$ (5), $x_A = 2x_{cm}$ (6), $F = T' = T$ (7).

α) Έργο

- Η δύναμη $\vec{F}$ μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της Α ευθύγραμμα κατά x_A, οπότε $W_{F(Δ,Ε)} = +Fx_A$.

  Είναι $x_A = \frac{1}{2}\alpha_A t^2$ και $x_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2$, και επειδή $\alpha_A = 2\alpha_{cm}$, ισχύει $x_A = 2x_{cm}$. Άρα $W_{F(Δ,Ε)} = +2Fx_{cm}$.

  Δείτε το και κάπως διαφορετικά

  Είναι $\vec{F} = \vec{T}$, και επειδή το νήμα δε γλιστρά, είναι $x_A = x_Γ$, οπότε $W_{F(Δ,Ε)} = W_{T(Δ,Ε)}$.

  Η δύναμη $\vec{T}$ έχει μεταφορικό και περιστροφικό ρόλο, οπότε $W_{T(Δ,Ε)} = W_{T(περ.)} + W_{T(μετ.)}$.

  Είναι $W_{T(περ.)} = \tau_T \theta = +TR\theta \overset{(3)}{=} +Tx_{cm} \Rightarrow W_{T(περ.)} = +Tx_{cm}$.

  Είναι $W_{T(μετ.)} = +Tx_{cm}$, άρα $W_{T(Δ,Ε)} = Tx_{cm} + Tx_{cm} = 2Tx_{cm} \xRightarrow{(7)} W_{F(Δ,Ε)} = +2Fx_{cm}$.

- *Η στατική τριβή $\vec{T}_{στ.}$ δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της, αφού ασκείται συνεχώς στο σημείο επαφής του δίσκου με το δάπεδο, το οποίο κάθε στιγμή είναι ακίνητο ($\upsilon_Z = 0$).*

  Άρα το έργο της στατικής τριβής κατά τη σύνθετη κίνηση είναι μηδέν, δηλαδή $W_{T_{στ.}} = 0$.

Δείτε το και κάπως διαφορετικά

Η στατική τριβή έχει μεταφορικό και περιστροφικό ρόλο.

Το έργο της στατικής τριβής κατά τη μεταφορική κίνηση είναι $W_{T_{στ.}(μετ.)} = +T_{στ.}x_{cm}$.

Το έργο της στατικής τριβής κατά την περιστροφική κίνηση είναι:

$W_{T_{στ.}(περ)} = \tau_{T_{στ.}}\theta = -T_{στ.}R\theta \xRightarrow{(3)} W_{T_{στ.}(περ.)} = -T_{στ.}x_{cm}$

Το πρόσημο (−) το βάζουμε διότι η $T_{στ.}$ αντιστέκεται στην περιστροφική κίνηση του δίσκου.

Είναι $W_{T_{στ.}(Δ,Ε)} = W_{T_{στ.}(μετ.)} + W_{T_{στ.}(περ.)} = +T_{στ.}x_{cm} - T_{στ.}x_{cm} = 0 \Rightarrow W_{T_{στ.}} = 0$.

β) Ισχύς

- $P_{F(E)} = +F\upsilon_A \xRightarrow{(4)} P_{F(E)} = +2F\upsilon_{cm}$
- $P_{T_{στ.}(E)} = \frac{dW_{T_{στ.}}}{dt} = 0 \quad \left(W_{T_{στ.}} = 0\right)$

γ) Κινητική ενέργεια

$$K = K_{μετ.} + K_{περ.} = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\omega^2 \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{4}M\upsilon_{cm}^2 = \frac{3}{4}M\upsilon_{cm}^2$$

Είναι $K = \frac{3}{4}M\upsilon_{cm}^2$, με $K_{μετ.} = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2$ και $K_{περ.} = \frac{1}{4}M\upsilon_{cm}^2$, οπότε $K_{μετ.} = 2K_{περ.}$.

δ) Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας

$$\frac{dK_{περ.}}{dt} = \Sigma\tau\cdot\omega = \left(+TR - T_{στ.}R\right)\omega \overset{(7)}{=} \left(F - T_{στ.}\right)R\omega \overset{(1)}{=} \left(F - T_{στ.}\right)\upsilon_{cm} \Rightarrow \frac{dK_{περ.}}{dt} = \left(F - T_{στ.}\right)\upsilon_{cm}$$

$$\frac{dK_{μετ.}}{dt} = +\Sigma F_x \upsilon_{cm} = \left(T + T_{στ.}\right)\upsilon_{cm} \overset{(7)}{=} \left(F + T_{στ.}\right)\upsilon_{cm} \Rightarrow \frac{dK_{μετ.}}{dt} = \left(F + T_{στ.}\right)\upsilon_{cm}$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{περ.}}{dt} + \frac{dK_{μετ.}}{dt} = \left(F - T_{στ.}\right)\upsilon_{cm} + \left(F + T_{στ.}\right)\upsilon_{cm} = +2F\upsilon_{cm} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = +2F\upsilon_{cm}$$

Π.5 ΕΡΓΟ – ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Δύο σπουδαία ενεργειακά εργαλεία για την επίλυση των προβλημάτων κίνησης

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ (Θ.Μ.Κ.Ε.)

$$\Delta K = \Sigma W$$

$$K_{τελ.} - K_{αρχ.} = W_{F_1} + W_{F_2} + \ldots$$

Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια ενός σώματος ή ενός συστήματος σωμάτων είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα ή στο σύστημα των σωμάτων.

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ (Α.Δ.Μ.Ε.)

$$E_{μηχ.,αρχ.} = E_{μηχ.,τελ.}$$

$$K_{αρχ.} + U_{αρχ.} = K_{τελ.} + U_{τελ.}$$

Αν σε ένα σώμα ή σε ένα σύστημα σωμάτων ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις ή αν ασκούνται και μη συντηρητικές των οποίων το συνολικό έργο ισούται με μηδέν, τότε η μηχανική ενέργεια του σώματος ή του συστήματος των σωμάτων παραμένει σταθερή.

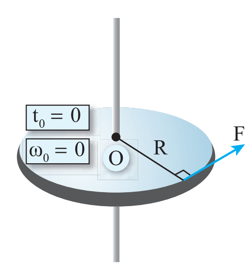
- Σε ασκήσεις όπου θέλουμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση ή τον χρόνο της κίνησης δε συνιστάται να εφαρμόσουμε Θ.Μ.Κ.Ε. ή Α.Δ.Μ.Ε. Η άσκηση λύνεται με τις εξισώσεις της κίνησης.
- Το Θ.Μ.Κ.Ε. εφαρμόζεται χωρίς περιορισμό στο είδος των δυνάμεων που ασκούνται.
- Στην εφαρμογή της Α.Δ.Μ.Ε. ορίζουμε αρχικά το επίπεδο της μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας. Ανεξάρτητα από την επιλογή, καταλήγουμε τελικά στο ίδιο αποτέλεσμα. Στην περίπτωση ενός σώματος, για ευκολία πράξεων θέτουμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το χαμηλότερο επίπεδο απ’ όπου διέρχεται το κέντρο μάζας (cm) του σώματος.
- Συντηρητικές δυνάμεις είναι οι δυνάμεις που κατά μήκος κλειστής διαδρομής έχουν έργο μηδέν. Στην κατηγορία των συντηρητικών δυνάμεων ανήκουν:
  – οι βαρυτικές δυνάμεις
  – οι δυνάμεις των ελατηρίων
  – οι ηλεκτρικές δυνάμεις.
- Στην περίπτωση ενός συστήματος σωμάτων:
  – δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για ένα σώμα του συστήματος
  – μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Κ.Ε για ένα σώμα του συστήματος, αρκεί να σχεδιάσουμε και τις εσωτερικές δυνάμεις που δέχεται το σώμα από τα υπόλοιπα σώματα του συστήματος.

Π.6 ΕΦΑΡΜΟΓΗ Θ.Μ.Κ.Ε. – Α.Δ.Μ.Ε. ΣΕ ΣΩΜΑ ΠΟΥ ΕΚΤΕΛΕΙ ΜΟΝΟ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΣΤΑΘΕΡΟ ΑΞΟΝΑ

Εφαρμογές

1. Ένας οριζόντιος ομογενής δίσκος μάζας $m = 2\,kg$ και ακτίνας $R = 1\,m$ είναι αρχικά ακίνητος και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του Ο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκείται στην περιφέρεια του δίσκου εφαπτομενική δύναμη $\vec{F}$ σταθερού μέτρου $F = 4\,N$. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1, που ο δίσκος ολοκληρώνει $\dfrac{25}{\pi}$ περιστροφές.

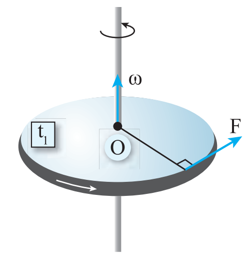
Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_{cm} = \dfrac{1}{2}mR^2$.



Λύση

$m = 2\,kg$, $R = 1\,m$, $F = 4\,N$, $N = \dfrac{25}{\pi}$ στροφές , $I_{cm} = \dfrac{1}{2}mR^2$

$\omega = ;$



Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, ο δίσκος ξεκινά να περιστρέφεται με την επίδραση της εφαπτομενικής δύναμης $\vec{F}$.

Στον δίσκο ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- η εφαπτομενική δύναμη $\vec{F}$
- η δύναμη $\vec{F}_{άξ.}$ από τον άξονα περιστροφής στο Ο και το βάρος $\vec{w}$ του δίσκου, *των οποίων το έργο είναι μηδέν, αφού κατά την περιστροφή του δίσκου δε μετακινούν το σημείο εφαρμογής τους.*

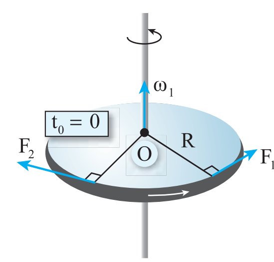
Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) για τον δίσκο στη χρονική διάρκεια από $0 \to t_1$, έχουμε:

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow K_{τελ.} - K_{αρχ.} = W_F + W_{F_{άξ.}} + W_w \Rightarrow \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 - 0 = W_F + 0 + 0 \Rightarrow \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = W_F \quad (1)$$

- *Η δύναμη $\vec{F}$ δημιουργεί σταθερή ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής.*
  Η δύναμη $\vec{F}$ έχει μόνο περιστροφικό ρόλο και συγκεκριμένα βοηθάει στην περιστροφική κίνηση του δίσκου, οπότε:
  $W_F = \tau_F\theta = +FR\theta \Rightarrow W_F = +FR\theta \quad (2)$
- Η γωνία στροφής θ του δίσκου στη χρονική διάρκεια από $0 \to t_1$ είναι $\theta = N \cdot 2\pi \Rightarrow \theta = \dfrac{25}{\pi} \cdot 2\pi\,rad \Rightarrow \theta = 50\,rad.$

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2\omega^2 = FR\theta \Rightarrow \omega^2 = \frac{4F\theta}{mR} \Rightarrow \omega = 2\sqrt{\frac{F\theta}{mR}} \Rightarrow \omega = 2\sqrt{\frac{4 \cdot 50}{2 \cdot 1}}\ rad/s \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 20\,rad/s}$$

2. Ένας οριζόντιος ομογενής δίσκος μάζας $m = 1\,kg$ και ακτίνας $R = 2\,m$ περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του Ο με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_1 = 10\,rad/s$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκούνται στον δίσκο οι εφαπτομενικές δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ σταθερού μέτρου $F_1 = 8\,N$ και $F_2 = 10\,N$. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω_2 του δίσκου τη στιγμή που η γωνία στροφής του από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι 16 rad.
Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_{cm} = \dfrac{1}{2}mR^2$.



Λύση

$m = 1\,kg$, $R = 2\,m$, $\omega_1 = 10\,rad/s$, $F_1 = 8\,N$, $F_2 = 10\,N$, $\theta = 16\,rad$, $I_{cm} = \dfrac{1}{2}mR^2$, $\omega = ;$

Στον δίσκο ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- οι εφαπτομενικές δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$
- η δύναμη $\vec{F}_{άξ.}$ από τον άξονα περιστροφής στο Ο και το βάρος $\vec{w}$ του δίσκου, *των οποίων το έργο είναι μηδέν, αφού κατά την περιστροφή του δίσκου δε μετακινούν το σημείο εφαρμογής τους.*

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας για τον δίσκο στη χρονική διάρκεια που η γωνία στροφής του είναι $\theta = 16\,rad$, έχουμε:

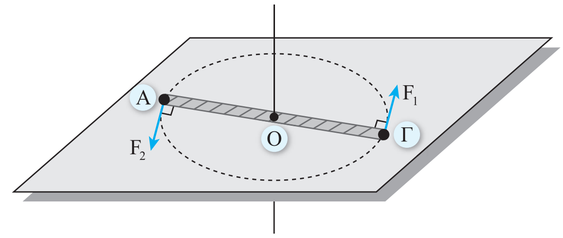
$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow K_{τελ.} - K_{αρχ.} = W_{F_1} + W_{F_2} + W_{F_{άξ.}} + W_w \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_{cm}\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_{cm}\omega_1^2 = W_{F_1} + W_{F_2} + 0 + 0 \Rightarrow \frac{1}{2}I_{cm}\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right) = W_{F_1} + W_{F_2} \quad (1)$$

- Είναι $I_{cm} = \dfrac{1}{2}mR^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2\,kg{\cdot}m^2 = 2\,kg{\cdot}m^2 \Rightarrow I_{cm} = 2\,kg{\cdot}m^2.$
- *Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ δημιουργούν σταθερή ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής.*
  Η δύναμη $\vec{F}_1$ έχει μόνο περιστροφικό ρόλο και συγκεκριμένα βοηθάει στην περιστροφική κίνηση του δίσκου, οπότε:
  $W_{F_1} = \tau_{F_1}\theta = +F_1R\theta \Rightarrow W_{F_1} = +F_1R\theta \quad (2)$
  Η δύναμη $\vec{F}_2$ έχει μόνο περιστροφικό ρόλο και συγκεκριμένα αντιστέκεται στην περιστροφική κίνηση του δίσκου, οπότε:
  $W_{F_2} = \tau_{F_2}\theta = -F_2R\theta \Rightarrow W_{F_2} = -F_2R\theta \quad (3)$

$$(1) \overset{(2)}{\underset{(3)}{\Longrightarrow}} \frac{1}{2}I_{cm}\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right) = +F_1R\theta - F_2R\theta \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\omega_2^2 - 10^2\right) = 8 \cdot 2 \cdot 16 - 10 \cdot 2 \cdot 16 \Rightarrow$$

$$\omega_2^2 - 100 = -64 \Rightarrow \omega_2^2 = 36 \Rightarrow \boldsymbol{\omega_2 = 6\,rad/s}$$



3. Η ομογενής ράβδος ΑΓ του σχήματος έχει μάζα m = 3 kg, μήκος ℓ = 4 m και μπορεί να περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της. Στην αρχικά ακίνητη ράβδο ασκούνται δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με μέτρο $F_1 = F_2 = F = 2$ N, οι οποίες είναι διαρκώς κάθετες στη ράβδο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου στο τέλος της δεύτερης περιστροφής.
Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I_{cm} = \frac{1}{12}m\ell^2$ και $\sqrt{\pi} = 1{,}8$.

Λύση

$m = 3\,kg$, $\ell = 4\,m$, $F_1 = F_2 = F = 2\,N$, $I_{cm} = \frac{1}{12}m\ell^2$, $\sqrt{\pi} = 1{,}8$, $\omega = ;$

Η ράβδος ξεκινά να περιστρέφεται αριστερόστροφα με την επίδραση των δυνάμεων $\vec{F}_1, \vec{F}_2$.
Στο τέλος της δεύτερης περιστροφής η γωνία στροφής της ράβδου είναι $\theta = 2 \cdot 2\pi\ rad \Rightarrow \theta = 4\pi\ rad$.
Στη ράβδο ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ που αποτελούν ζεύγος δυνάμεων
- η δύναμη $\vec{F}_{αξ.}$ από τον άξονα περιστροφής στο Ο και το βάρος $\vec{w}$ της ράβδου, *των οποίων το έργο είναι μηδέν, αφού κατά την περιστροφή της ράβδου δε μετακινούν το σημείο εφαρμογής τους.*

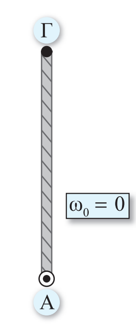
Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας για τη ράβδο από τη στιγμή που ξεκίνησε μέχρι το τέλος της δεύτερης περιστροφής, έχουμε:

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow K_{τελ.} - K_{αρχ.} = W_{F_1} + W_{F_2} + W_{F_{αξ.}} + W_w \Rightarrow \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 - 0 = W_{F_1} + W_{F_2} + 0 + 0 \Rightarrow \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = W_{F_1} + W_{F_2} \quad (1)$$

- Είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}m\ell^2 = \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 4^2\ kg{\cdot}m^2 = 4\ kg{\cdot}m^2 \Rightarrow I_{cm} = 4\ kg{\cdot}m^2$.
- *Οι δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ δημιουργούν σταθερή ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής.*
  Οι δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ έχουν μόνο περιστροφικό ρόλο και συγκεκριμένα βοηθούν στην περιστροφική κίνηση της ράβδου, οπότε $W_{F_1} = \tau_{F_1}\theta = +F_1\frac{\ell}{2}\theta = +F\frac{\ell}{2}\theta$ και $W_{F_2} = \tau_{F_2}\theta = +F_2\frac{\ell}{2}\theta = +F\frac{\ell}{2}\theta$. Άρα $W_{F_1} = W_{F_2} = +F\frac{\ell}{2}\theta$ (2).

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = +F\frac{\ell}{2}\theta + F\frac{\ell}{2}\theta \Rightarrow \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = +F\ell\theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2F\ell\theta}{I_{cm}}} \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4\pi}{4}}\ rad/s \Rightarrow \omega = 4\sqrt{\pi}\ rad/s \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 7{,}2\ rad/s}$$



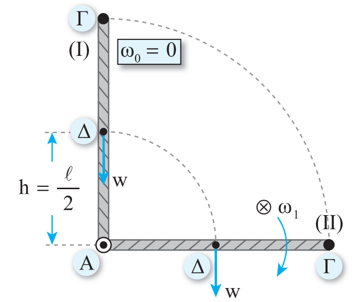
4. Η λεπτή και ομογενής ράβδος ΑΓ του σχήματος έχει μάζα m, μήκος ℓ = 0,3 m και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α. Η ράβδος είναι ακίνητη στην κατακόρυφη θέση και δίνοντάς της ελάχιστη ώθηση αρχίζει να περιστρέφεται. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου τη στιγμή που η ράβδος:
α) γίνεται για πρώτη φορά οριζόντια
β) περνά για πρώτη φορά από την κάτω κατακόρυφη θέση της
γ) σχηματίζει για πρώτη φορά γωνία φ = 60° με την αρχική της θέση.
Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{1}{3}m\ell^2$ και $g = 10\ m/s^2$.

Λύση

$\ell = 0{,}3\,m$, $I = \frac{1}{3}m\ell^2$, $g = 10\,m/s^2$

1ος τρόπος με Θ.Μ.Κ.Ε.
Στη ράβδο ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος της $\vec{w}$
- η δύναμη $\vec{F}_{αξ.}$ από τον άξονα περιστροφής στο Α, *της οποίας το έργο είναι μηδέν, αφού κατά την περιστροφή της ράβδου δε μετακινεί το σημείο εφαρμογής της.*



α) $\omega_1 = ;$

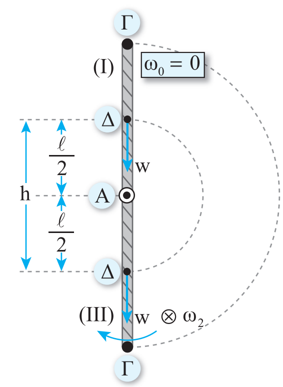
Κατά τη μετακίνηση της ράβδου από τη θέση (I) στη θέση (II) η κατακόρυφη απόσταση h (η υψομετρική διαφορά) του κέντρου μάζας της Δ είναι $h = \frac{\ell}{2}$. Το κέντρο μάζας της ράβδου κατεβαίνει, οπότε $W_{w(I,II)} = +mgh = +mg\frac{\ell}{2} \Rightarrow W_{w(I,II)} = +mg\frac{l}{2}$.

Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ των θέσεων (I) και (II), έχουμε:

$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow K_{τελ.(II)} - K_{αρχ.(I)} = W_w + W_{F_{άξ.}} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}I\omega_1^2 - 0 = W_w + 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m\ell^2\omega_1^2 = +mg\frac{\ell}{2} \Rightarrow$

$\frac{1}{3}\ell\omega_1^2 = g \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{\ell}} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{3\cdot 10}{0,3}}$ rad/s $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\omega_1 = 10}$ **rad/s**



β) $\omega_2 = ;$

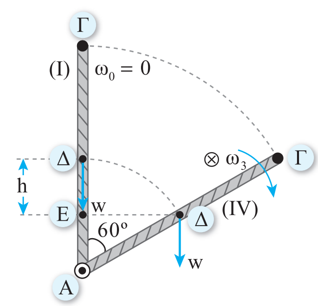
Κατά τη μετακίνηση της ράβδου από τη θέση (I) στη θέση (III) η κατακόρυφη απόσταση h (η υψομετρική διαφορά) του κέντρου μάζας της Δ είναι $h = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} = \ell$. Το κέντρο μάζας της ράβδου κατεβαίνει, οπότε $W_{w(I,III)} = +mgh = +mg\ell \Rightarrow W_{w(I,III)} = +mgl$.

Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ των θέσεων (I) και (III), έχουμε:

$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow K_{τελ.(III)} - K_{αρχ.(I)} = W_w + W_{F_{άξ.}} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}I\omega_2^2 - 0 = W_w + 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m\ell^2\omega_2^2 = +mg\ell \Rightarrow$

$\frac{1}{6}\ell\omega_2^2 = g \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{6g}{\ell}} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{6\cdot 10}{0,3}}$ rad/s $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\omega_2 = 10\sqrt{2}}$ **rad/s**



γ) $\omega_3 = ;$

Είναι $AE = A\Delta \cdot συν60° = \frac{\ell}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\ell}{4}$. Άρα $h = A\Delta - AE = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{4} = \frac{\ell}{4}$.

Κατά τη μετακίνηση της ράβδου από τη θέση (I) στη θέση (IV) η κατακόρυφη απόσταση h (η υψομετρική διαφορά) του κέντρου μάζας της Δ είναι $h = \frac{\ell}{4}$. Το κέντρο μάζας της ράβδου κατεβαίνει, οπότε $W_{w(I,IV)} = +mgh = +mg\frac{\ell}{4} \Rightarrow W_{w(I,IV)} = +mg\frac{l}{4}$.

Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ των θέσεων (I) και (IV), έχουμε:

$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow K_{τελ.(IV)} - K_{αρχ.(I)} = W_w + W_{F_{άξ.}} \Rightarrow$

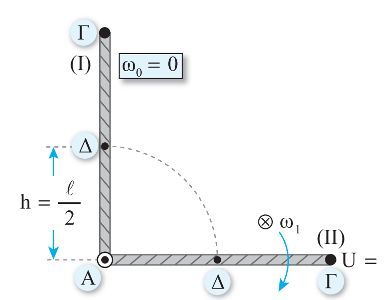
$\frac{1}{2}I\omega_3^2 - 0 = W_w + 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m\ell^2\omega_3^2 = +mg\frac{\ell}{4} \Rightarrow$

$\frac{1}{3}\ell\omega_3^2 = \frac{g}{2} \Rightarrow \omega_3 = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}} \Rightarrow \omega_3 = \sqrt{\frac{3\cdot 10}{2\cdot 0,3}}$ rad/s $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\omega_3 = 5\sqrt{2}}$ **rad/s**

2ος τρόπος με Α.Δ.Μ.Ε.

Στη ράβδο ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος της $\vec{w}$ *που είναι συντηρητική δύναμη*
- η δύναμη $\vec{F}_{άξ.}$ από τον άξονα περιστροφής στο Α, *η οποία είναι μη συντηρητική δύναμη με έργο ίσο με μηδέν, αφού κατά την περιστροφή της ράβδου δε μετακινεί το σημείο εφαρμογής της. Άρα ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας.*



α) $\omega_1 = ;$

Αν ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας ορίσουμε το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας Δ της ράβδου όταν αυτή βρίσκεται στη θέση (II), τότε $U_{(I)} = +mgh = +mg\frac{\ell}{2}$ και $U_{(II)} = 0$.

Εφαρμόζοντας Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ των θέσεων (I) και (II), έχουμε:

$E_{μηχ.,αρχ.(I)} = E_{μηχ.,τελ.(II)} \Rightarrow K_{αρχ.(I)} + U_{αρχ.(I)} = K_{τελ.(II)} + U_{τελ.(II)} \Rightarrow$

$0 + mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}I\omega_1^2 + 0 \Rightarrow mg\ell = \frac{1}{3}m\ell^2\omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{\ell}} \Rightarrow$ $\boldsymbol{\omega_1 = 10}$ **rad/s**