


Μαθηματικά

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ	Παναγιώτης Βλάμος , <i>Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης</i> Παναγιώτης Δρούτσας , <i>Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης</i> Γεώργιος Πρέσβης , <i>Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης</i> Κωνσταντίνος Ρεκούμης , <i>Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης</i>
ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ	Βασίλειος Γιαλαμάς , <i>Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.</i> Χαράλαμπος Τουμάσης , <i>Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών</i> Πολυξένη Ράδου , <i>Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης</i>
ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ	Θεοδότης Βρανάς , <i>Σκιτσογράφος - Εικονογράφος</i>
ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ	Ευγενία Βελάγκου , <i>Φιλολόγος, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης</i>
ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ	Γεώργιος Πολύζος , <i>Πάρεδρος ε.θ. του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου</i>
ΕΞΩΦΥΛΛΟ	Γεώργιος Μήλιος , <i>Ζωγράφος - Χαράκτης</i>
ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ	 ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

Γ' Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ II / Ενέργεια 2.2.1. / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α:
«Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
Δημήτριος Γ. Βλάχος
*Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ.,
Πρόεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου*

Πράξη με τίτλο:

«Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Αναπληρωτές Επιστημονικοί Υπεύθυνοι Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός
Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

ΕΚΣΥΓΧΡΟΝΙΣΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΜΑΚΕΤΑΣ,
ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗ ΑΛΛΑΓΩΝ ΒΑΣΕΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΩΝ

ΤΟΥ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟΥ,
ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ:

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΚΔΟΣΕΩΝ / Ι.Τ.Υ.Ε. «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

**Παναγιώτης Βλάμος
Παναγιώτης Δρούτσας
Γεώργιος Πρέσβης
Κωνσταντίνος Ρεκούμης**

Μαθηματικά

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»



Πρόλογος

Το βιβλίο «**Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου**» περιλαμβάνει την ύλη που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

Αποτελείται από δύο μέρη τα οποία θα μελετηθούν παράλληλα και αρκετές φορές συμπληρωματικά.

Στο πρώτο μέρος, η Άλγεβρα ξεκινά με εξισώσεις και ανισώσεις α΄ βαθμού, ενώ στο δεύτερο μέρος η Γεωμετρία ξεκινά με τα εμβαδά επίπεδων σχημάτων τα οποία οδηγούν στο Πυθαγόρειο θεώρημα. Στη Γεωμετρία το Πυθαγόρειο θεώρημα θα μελετηθεί μόνο για ρητούς αριθμούς και κατόπιν θα αποτελέσει τη βάση για την εισαγωγή των άρρητων αριθμών στο δεύτερο κεφάλαιο της Άλγεβρας. Γνωρίζοντας τους πραγματικούς αριθμούς μπορούμε να μελετήσουμε την Τριγωνομετρία, η οποία καταλαμβάνει τις περισσότερες παραγράφους του δεύτερου κεφαλαίου του δεύτερου μέρους, το οποίο ολοκληρώνεται με τα διανύσματα.

Στη συνέχεια η πορεία των δύο μερών του βιβλίου γίνεται σχεδόν ανεξάρτητη. Το πρώτο μέρος ολοκληρώνεται με την παρουσίαση βασικών συναρτήσεων και την περιγραφική Στατιστική, ενώ το δεύτερο με τη μέτρηση κύκλου και τη μελέτη και μέτρηση γεωμετρικών στερεών.

Οι συγγραφείς



Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ Α'

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1.1 - Η έννοια της μεταβλητής - Αλγεβρικές παραστάσεις	11
1.2 - Εξισώσεις α' βαθμού	15
1.3 - Επίλυση τύπων	22
1.4 - Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων	26
1.5 - Ανισώσεις α' βαθμού	31

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο - ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2.1 - Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού	41
2.2 - Άρρητοι αριθμοί - Πραγματικοί αριθμοί	45
2.3 - Προβλήματα	49

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.1 - Η έννοια της συνάρτησης	55
3.2 - Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση συνάρτησης	58
3.3 - Η συνάρτηση $y=ax$	67
3.4 - Η συνάρτηση $y=ax + \beta$	72
3.5 - Η συνάρτηση $y=a/x$ - Η υπερβολή	79

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο - ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

4.1 - Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός - Δείγμα	85
4.2 - Γραφικές Παραστάσεις	89
4.3 - Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων	95
4.4 - Ομαδοποίηση παρατηρήσεων	100
4.5 - Μέση τιμή - Διάμεσος	104

ΜΕΡΟΣ Β'

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ - ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

1.1 - Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας	113
1.2 - Μονάδες μέτρησης επιφανειών	116
1.3 - Εμβαδά επίπεδων σχημάτων	119
1.4 - Πυθαγόρειο θεώρημα	127

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ - ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

2.1 - Εφαπτομένη οξείας γωνίας	136
2.2 - Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας	142
2.3 - Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης	147
2.4 - Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° και 60°	152
2.5 - Η έννοια του διανύσματος	156
2.6 - Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων	162
2.7 - Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες	168

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο - ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

3.1 - Εγγεγραμμένες γωνίες	175
3.2 - Κανονικά πολύγωνα	180
3.3 - Μήκος κύκλου	186
3.4 - Μήκος τόξου	190
3.5 - Εμβαδόν κυκλικού δίσκου	193
3.6 - Εμβαδόν κυκλικού τομέα	196

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο - ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ - ΜΕΤΡΗΣΗ ΣΤΕΡΕΩΝ

4.1 - Ευθείες και επίπεδα στον χώρο	201
4.2 - Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου	206
4.3 - Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου	212
4.4 - Η πυραμίδα και τα στοιχεία της	216
4.5 - Ο κώνος και τα στοιχεία του	223
4.6 - Η σφαίρα και τα στοιχεία της	228
4.7 - Γεωγραφικές συντεταγμένες	233

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ	238
-------------------------	-----

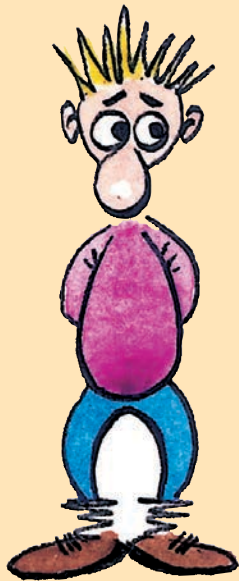
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ	250
----------------	-----

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	253
--------------	-----

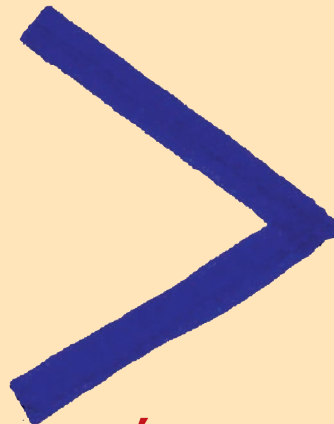
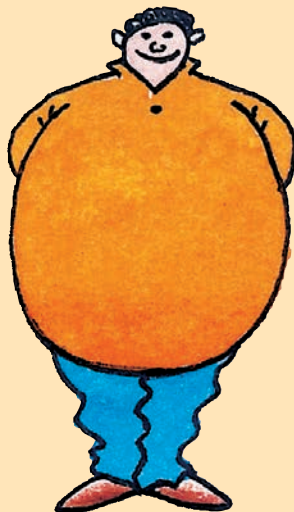
ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ	254
---------------------------------	-----

ΜΕΡΟΣ Α'

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο



ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ



ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ



ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

1.1 Η έννοια
της μεταβλητής.
Αλγεβρικές
παραστάσεις

1.2 Εξισώσεις α' βαθμού

1.3 Επίλυση τύπων

1.4 Επίλυση
προβλημάτων
με τη χρήση
εξισώσεων

1.5 Ανισώσεις α' βαθμού

Λίγα πράγματα είναι γνωστά για τη ζωή του μεγάλου Έλληνα μαθηματικού Διόφαντου, που έζησε στην Αλεξάνδρεια τον 3ο μ.Χ. αιώνα. Οι εργασίες του όμως είχαν τεράστια σημασία για τη θεμελίωση της Άλγεβρας και εκτιμήθηκαν πολύ τους επόμενους αιώνες. Από τα 13 έργα που έγραψε σώθηκαν μόνο τα 10 (τα 6 σε ελληνικά χειρόγραφα και τα 4 σε αραβική μετάφραση).

Το πιο διάσημο από τα έργα του είναι τα «**Αριθμητικά**» (6 βιβλία). Πρόκειται για το αρχαιότερο ελληνικό έργο στο οποίο για πρώτη φορά χρησιμοποιείται μεταβλητή για την επίλυση προβλήματος. Προς τιμήν του μια ειδική κατηγορία εξισώσεων ονομάζεται «**Διοφαντικές εξισώσεις**».

Όταν πέθανε, οι μαθητές του -κατά παραγγελίαν του- αντί άλλου επιγράμματος, συνέθεσαν ένα γρίφο και τον έγραψαν πάνω στον τάφο του. Ιδού λοιπόν το Επίγραμμα του Διόφαντου.

«ΔΙΑΒΑΘΗ ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟΝ ΤΑΦΟ ΑΝΑΠΑΥΕΤΑΙ Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ. ΣΕ ΕΣΕΝΑ ΠΟΥ ΕΙΣΑΙ ΣΟΦΟΣ, Η ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΘΑ ΔΩΣΕΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ. ΑΚΟΥΣΕ

- Ο ΘΕΟΣ ΤΟΥ ΕΠΕΤΡΕΨΕ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΜΕΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΝΑ ΕΚΤΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ.
- ΑΚΟΜΗ ΕΝΑ ΔΩΔΕΚΑΤΟ ΚΑΙ ΦΥΤΡΩΣΕ ΤΟ ΜΑΥΡΟ ΓΕΜΙ ΤΟΥ.
- ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΕΒΔΟΜΟ ΑΚΟΜΑ ΗΡΘΕ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ ΤΟΥ Η ΜΕΡΑ.
- ΤΟΝ ΠΕΜΠΤΟ ΧΡΟΝΟ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ ΓΕΝΝΗΘΗΚΕ ΕΝΑ ΠΑΙΔΙ.
- ΤΙ ΚΡΙΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΝΕΑΡΟ ΤΟΥ ΓΙΟ. ΑΦΟΥ ΕΖΗΣΕ ΜΟΝΑΧΑ ΤΑ ΜΙΣΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΑΤΕΡΑ ΤΟΥ ΓΝΩΡΙΣΕ ΤΗΝ ΠΑΓΩΜΙΑ ΤΟΥ ΘΑΝΑΤΟΥ.
- ΤΕΣΣΕΡΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΡΓΟΤΕΡΑ Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ ΒΡΗΚΕ ΠΑΡΗΓΟΡΙΑ ΣΤΗ ΘΛΙΨΗ ΤΟΥ ΦΤΑΝΟΝΤΑΣ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ».

Σύμφωνα μ' αυτό το επίγραμμα, πόσα χρόνια έζησε ο Διόφαντος; Αν x παριστάνει την ηλικία του Διόφαντου, όταν πέθανε, τότε το παραπάνω πρόβλημα παριστάνεται από την

$$\text{εξίσωση: } \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε να λύνουμε τέτοιες εξισώσεις (καθώς και ανισώσεις).

Θα αναζητήσουμε επίσης τρόπους να εφαρμόσουμε τη μέθοδο αυτή, για να λύνουμε προβλήματα της καθημερινής ζωής.

1.1.

Η έννοια της μεταβλητής - Αλγεβρικές παραστάσεις



Μεταβλητή

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Η ομιλία σε κινητό τηλέφωνο κοστίζει 0,005 € το δευτερόλεπτο. Πόσο κοστίζει ένα τηλεφώνημα διάρκειας 10 δευτερολέπτων, ένα άλλο διάρκειας 15 δευτερολέπτων και ένα άλλο διάρκειας 27 δευτερολέπτων:

Λύση

Εύκολα βέβαια βρίσκουμε ότι:

- ✓ Ένα τηλεφώνημα διάρκειας 10 δευτερολέπτων κοστίζει
 $10 \cdot 0,005 = 0,05 \text{ €}$
- ✓ Ένα τηλεφώνημα διάρκειας 15 δευτερολέπτων κοστίζει
 $15 \cdot 0,005 = 0,075 \text{ €}$
- ✓ Ένα τηλεφώνημα διάρκειας 27 δευτερολέπτων κοστίζει
 $27 \cdot 0,005 = 0,135 \text{ €}$

Μπορούμε λοιπόν να σκεφτούμε ότι το κόστος ενός τηλεφωνήματος θα είναι: **(διάρκεια τηλεφωνήματος) · 0,005 €**. Για ευκολία, συμβολίζουμε με το γράμμα **x** τη διάρκεια του τηλεφωνήματος (σε δευτερόλεπτα), οπότε καταλήγουμε ότι το κόστος για κάθε τηλεφώνημα διάρκειας x δευτερολέπτων είναι: **x · 0,005 €**.

Το γράμμα **x**, που στην προκειμένη περίπτωση παριστάνει έναν οποιοδήποτε θετικό αριθμό, λέγεται **μεταβλητή**.

Γενικά:

Μεταβλητή είναι ένα γράμμα (π.χ. x, y, t, ...) που το χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου.

Αλγεβρικές παραστάσεις - Αναγωγή ομοίων όρων

- Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς, λέγεται, όπως γνωρίζουμε, **αριθμητική παράσταση**.

Για παράδειγμα, η παράσταση $2 \cdot 3 - 4 \cdot (-3) + 5$ είναι μια αριθμητική παράσταση. Ομοίως, η παράσταση $\frac{5 \cdot 8 + 4 \cdot 3}{2(-7) + 6 \cdot 9}$ είναι μία αριθμητική παράσταση.

- Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές ονομάζεται **αλγεβρική παράσταση**.

Για παράδειγμα, η παράσταση $2 \cdot x - 4 \cdot x + 5$ είναι μια αλγεβρική παράσταση. Οι προσθετέοι λέγονται **όροι** αυτής.

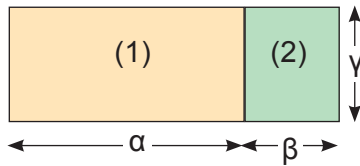
Ομοίως, η παράσταση $\frac{2 \cdot x - 4}{3 \cdot x^2 + 5}$ είναι μία αλγεβρική παράσταση.

Πώς κάνουμε όμως τις πράξεις σε μια αλγεβρική παράσταση; Στο σημείο αυτό μπορεί να μας βοηθήσει λίγο η Γεωμετρία! Ας θυμηθούμε, λοιπόν, τα εμβαδά των ορθογώνιων:



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Στο διπλανό σχήμα δύο ορθογώνια (1) και (2) είναι «τοποθετημένα» έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα μεγάλο ορθογώνιο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου.



Λύση

Για να βρούμε το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου, υπάρχουν δύο τρόποι:

➤ 1ος τρόπος:

Το μεγάλο ορθογώνιο έχει βάση $\alpha + \beta$ και ύψος γ , άρα το εμβαδόν του είναι:

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma$$

➤ 2ος τρόπος:

Το εμβαδόν του (1) είναι: $\alpha \cdot \gamma$.
Το εμβαδόν του (2) είναι: $\beta \cdot \gamma$.
Άρα το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου είναι:

$$\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$$

Φυσικά, και οι δύο τρόποι θα πρέπει να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, δηλαδή: $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$, που είναι η γνωστή **επιμεριστική ιδιότητα**, η οποία μπορεί να γραφεί και στη μορφή:

$$\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma = (\alpha + \beta) \cdot \gamma$$

Στη μορφή αυτή, η επιμεριστική ιδιότητα μπορεί να μας βοηθήσει να κάνουμε εύκολα πράξεις στις αλγεβρικές παραστάσεις:

Παράδειγμα:

$$7 \cdot \alpha + 8 \cdot \alpha = (7 + 8) \cdot \alpha = 15 \cdot \alpha$$

$$x + 4 \cdot x - 2 \cdot x = (1 + 4 - 2) \cdot x = 3 \cdot x$$

$$5 \cdot t - 6 \cdot t - 8 \cdot t = (5 - 6 - 8) \cdot t = -9 \cdot t$$

Η διαδικασία αυτή με την οποία γράψαμε σε απλούστερη μορφή τις παραπάνω αλγεβρικές παραστάσεις, ονομάζεται «αναγωγή ομοίων όρων».

Παρατήρηση:

Όταν γράφουμε αλγεβρικές παραστάσεις, συνήθως δε βάζουμε το σύμβολο (\cdot) του πολλαπλασιασμού μεταξύ των αριθμών και των μεταβλητών ή μεταξύ των μεταβλητών. Γράφουμε δηλαδή $3xy$ αντί για $3 \cdot x \cdot y$. Επίσης, γράφουμε $2(4xy - 1) + 3(2 - 5x)$ αντί για $2 \cdot (4 \cdot x \cdot y - 1) + 3 \cdot (2 - 5 \cdot x)$.

Το σύμβολο του πολλαπλασιασμού θα χρησιμοποιείται βέβαια, για τον πολλαπλασιασμό αριθμών: $3 \cdot 5$ ή $3 \cdot (-5)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να γράψετε με απλούστερο τρόπο τις παραστάσεις:

(α) $2x + 5x$, (β) $3a + 4a - 12a$, (γ) $\omega + 3\omega + 5\omega + 7\omega$.

Λύση: Έχουμε ότι:

(α) $2x + 5x = (2 + 5)x = 7x$

(β) $3a + 4a - 12a = (3 + 4 - 12)a = -5a$

(γ) $\omega + 3\omega + 5\omega + 7\omega = (1 + 3 + 5 + 7)\omega = 16\omega$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: (α) $4y + 3x - 2y + x$, (β) $y + 2\omega - 3y + 2 + \omega + 5$.

Λύση: Έχουμε ότι:

$$(α) \quad 4y + 3x - 2y + x = 4y - 2y + 3x + x = (4 - 2)y + (3 + 1)x = 2y + 4x$$

$$(β) \quad y + 2\omega - 3y + 2 + \omega + 5 = y - 3y + 2\omega + \omega + 2 + 5 = (1 - 3)y + (2 + 1)\omega + (2 + 5) = -2y + 3\omega + 7.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 2(x + 3) - 4(x - 1) - 8$, όταν $x = -0,45$.

Λύση: Απλοποιούμε πρώτα την παράσταση A:

$$A = 2(x + 3) - 4(x - 1) - 8 =$$

$$= 2x + 6 - 4x + 4 - 8 = 2x - 4x + 6 + 4 - 8 = -2x + 2$$

$$\text{Επομένως, όταν } x = -0,45, \text{ είναι: } A = -2 \cdot (-0,45) + 2 = 0,9 + 2 = 2,9.$$

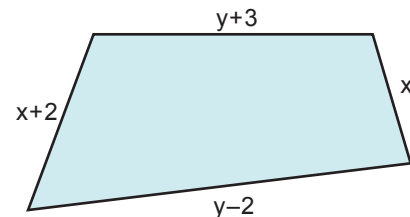
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να υπολογίσετε την περίμετρο του παρακάτω τετραπλεύρου, όταν $x + y = 10$.

Λύση: Η περίμετρος του τετραπλεύρου είναι ίση με:

$$\begin{aligned} \Pi &= x + (y + 3) + (x + 2) + (y - 2) = \\ &= x + y + 3 + x + 2 + y - 2 = \\ &= x + x + y + y + 3 + 2 - 2 = 2x + 2y + 3 = \\ &= 2(x + y) + 3 \end{aligned}$$

$$\text{Επειδή } x + y = 10, \text{ είναι } \Pi = 2 \cdot 10 + 3 = 20 + 3 = 23.$$

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ**

1. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης A του διπλανού πίνακα με το ίσο του στοιχείο της στήλης B.

	ΣΤΗΛΗ A	ΣΤΗΛΗ B
α)	$2x + 5x - 3x$	i) $-4x$
β)	$x - 3x + 4x$	ii) $-5x$
γ)	$-x + 3x - 6x$	iii) $4x$
δ)	$-2x + 4x - 7x$	iv) $2x$

2. Για κάθε αλγεβρική παράσταση της 1ης στήλης του διπλανού πίνακα, δίνονται τρεις απαντήσεις A, B και Γ, από τις οποίες μία μόνο είναι σωστή. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

	A	B	Γ	
α)	$2x - 4x + 6x =$	$12x$	$-2x$	$4x$
β)	$3y - 3y + 4y =$	$4y$	$10y$	$-5y$
γ)	$-5\alpha + 3\alpha - \alpha =$	3α	-3α	9α
δ)	$3\alpha - 4\beta + 4\beta - 5\alpha =$	$8\alpha + 8\beta$	2α	-2α

3. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης A με την ίση της παράσταση που βρίσκεται στη στήλη B.

	ΣΤΗΛΗ A	ΣΤΗΛΗ B
α)	$(3x + 5) + (x - 6)$	i) $-4x + 11$
β)	$(-3x + 5) - (x - 6)$	ii) $-4x + 1$
γ)	$(-3x + 5) - (x + 6)$	iii) $-4x - 1$
δ)	$-(3x + 5) - (x - 6)$	iv) $4x - 1$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1** Να χρησιμοποιήσετε μεταβλητές για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω φράσεις:
- Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 12.
 - Το άθροισμα δύο αριθμών πολλαπλασιασμένο επί 9.
 - Την περίμετρο ενός ορθογωνίου, που το μήκος του είναι 2 m μεγαλύτερο από το πλάτος του.
- 2** Να χρησιμοποιήσετε μια μεταβλητή για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω φράσεις:
- Το συνολικό ποσό που θα πληρώσουμε για να αγοράσουμε 5 κιλά πατάτες, αν γνωρίζουμε την τιμή του ενός κιλού.
 - Την τελική τιμή ενός προϊόντος, αν γνωρίζουμε ότι αυτή είναι η αναγραφόμενη τιμή συν 19% ΦΠΑ.
- 3** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
- $20x - 4x + x$
 - $-7a - 8a - a$
 - $14y + 12y + y$
 - $14\omega - 12\omega - \omega + 3\omega$
 - $-6x + 3 + 4x - 2$
 - $\beta - 2\beta + 3\beta - 4\beta$
- 4** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
- $2x - 4y + 3x + 3y$
 - $6\omega - 2\omega + 4a + 3\omega + a$
 - $x + 2y - 3x - 4y$
 - $-8x + \omega + 3\omega + 2x - x$
- 5** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις A, B και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή τους:
- $A = 3(x + 2y) - 2(2x + y)$,
όταν $x = 1$, $y = -2$.
 - $B = 5(2a - 3\beta) + 3(4\beta - a)$,
όταν $a = -3$, $\beta = 5$.

- 6** Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:
- $A = 2(a - 3\beta) + 3(a + 2\beta)$, όταν $a = 0,02$ και $\beta = 2005$.
 - $B = 3(x + 2y) + 2(3x + y) + y$,
όταν $x + y = \frac{1}{9}$.

- 7** Οι διαιτολόγοι, για να εξετάσουν αν ένα άτομο είναι αδύνατο ή παχύ, χρησιμοποιούν τον αριθμό $\frac{B}{u^2}$ (δείκτης σωματικού βάρους ή body mass index, δηλαδή BMI), όπου B το βάρος του ατόμου και u το ύψος του σε μέτρα. Ανάλογα με το αποτέλεσμα αυτό, το άτομο κατατάσσεται σε κατηγορία σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

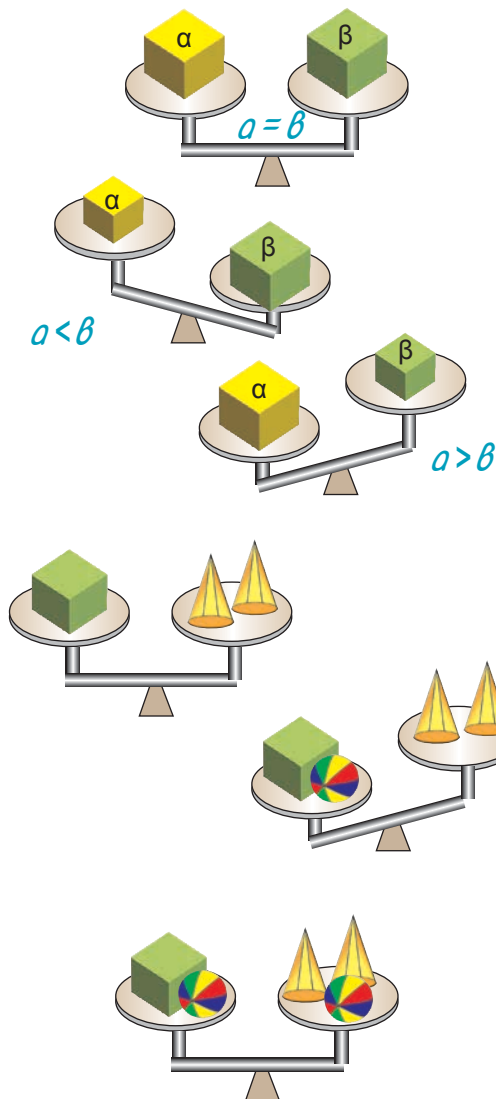


	ΓΥΝΑΙΚΕΣ	ΑΝΔΡΕΣ
Κανονικό βάρος	18,5 - 23,5	19,5 - 24,9
1ος βαθμός παχυσαρκίας	23,6 - 28,6	25 - 29,9
2ος βαθμός παχυσαρκίας	28,7 - 40	30 - 40
3ος βαθμός παχυσαρκίας	πάνω από 40	πάνω από 40

Να χαρακτηρίσετε:

- Το Γιώργο, με βάρος 87 κιλά και ύψος 1,75 μέτρα.
- Την Αλέκα, με βάρος 64 κιλά και ύψος 1,42 μέτρα.
- Τον εαυτό σας.

1.2. Εξισώσεις α' βαθμού



Χρήσιμες ιδιότητες πράξεων

Μια σχέση ισότητας ή ανισότητας είναι στην ουσία μια ζυγαριά, η οποία είτε ισορροπεί, είτε γέρνει από τη μία πλευρά, είτε γέρνει από την άλλη.

Αν a και b παριστάνουν τα βάρη των αντικειμένων του σχήματος, τότε θα ισχύει μία μόνο από τις σχέσεις:

$$a = b, a < b, a > b$$

Για να χειριστούμε σωστά μια ισότητα, είναι χρήσιμο να έχουμε υπόψη μας μερικούς βασικούς κανόνες.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Ο Γιώργος έχει μια ζυγαριά που ισορροπεί, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Πρόκειται δηλαδή για έναν κύβο που έχει βάρος ίσο με το βάρος δύο κώνων. Προσθέτει στο δίσκο της ζυγαριάς όπου βρίσκεται ο κύβος, μια μπάλα, οπότε η ζυγαριά γέρνει προς αυτή την πλευρά. Πόσες μπάλες πρέπει να τοποθετήσει στο δίσκο της ζυγαριάς όπου βρίσκονται οι δύο κώνοι, για να ισορροπήσει και πάλι η ζυγαριά;

Λύση

Για να ισορροπήσει και πάλι η ζυγαριά, πρέπει βέβαια να τοποθετήσει και στην άλλη πλευρά το ίδιο βάρος, δηλαδή μία μπάλα.

Δηλαδή: ένας κύβος και μία μπάλα ισορροπούν με 2 κώνους και μία μπάλα.

Το συμπέρασμα αυτό μπορούμε να το διατυπώσουμε ως γενικότερο κανόνα για τις ισότητες.

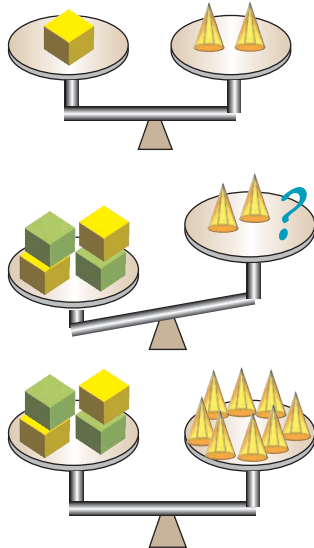
Άρα: 

Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας **προσθέσουμε** τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή: **Αν $a=b$ τότε $a+\gamma = b+\gamma$.**

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το ίδιο ισχύει και για την αφαίρεση.

Άρα: 

Αν και από τα δύο μέλη μιας ισότητας **αφαιρέσουμε** τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή: **Αν $a=b$ τότε $a-\gamma = b-\gamma$.**



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Ο Γιώργος ξέρει ότι ένας κύβος ισορροπεί με δύο κώνους. Αν βάλει 4 κύβους στη μία πλευρά, πόσους κώνους πρέπει να βάλει στην άλλη πλευρά, ώστε να ισορροπήσει και πάλι η ζυγαριά;

Λύση

Αφού τετραπλασίασε το βάρος στη μία πλευρά, για να ισορροπήσει και πάλι η ζυγαριά, πρέπει να τοποθετήσει τετραπλάσιο βάρος και στην άλλη πλευρά, δηλαδή πρέπει να τοποθετήσει 8 κώνους.

Γενικά:

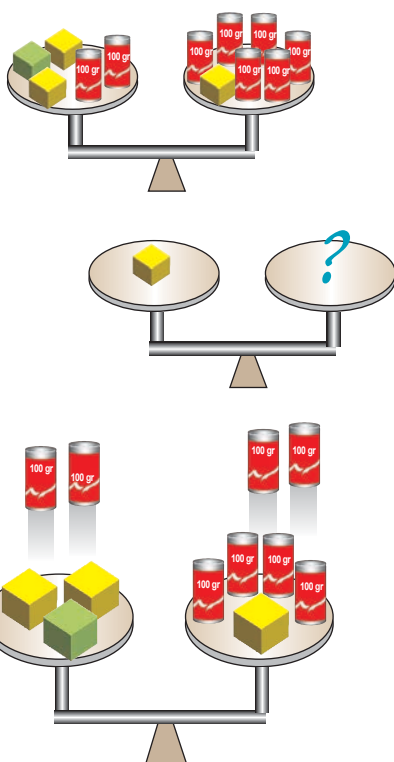
Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας **πολλαπλασιαστούν** με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή:

$$\text{Αν } a = b \text{ τότε } a \cdot \gamma = b \cdot \gamma.$$

Ομοίως:

Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας **διαιρεθούν** με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή:

$$\text{Αν } a = b \text{ τότε } \frac{a}{\gamma} = \frac{b}{\gamma} \text{ με } \gamma \neq 0.$$



Η έννοια της εξίσωσης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3

Η διπλανή ζυγαριά ισορροπεί! Μπορείτε να βρείτε πόσο ζυγίζει ένας κύβος; Τα βαρίδια ζυγίζουν 100 γραμμάρια το καθένα.

Λύση

Για να λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα, θα πρέπει να προσπαθήσουμε να απομονώσουμε στον ένα δίσκο της ζυγαριάς έναν κύβο, φροντίζοντας όμως η ζυγαριά να ισορροπεί.

➤ 1ο βήμα:

Καταρχάς, παρατηρούμε ότι στον ένα δίσκο της ζυγαριάς υπάρχουν δύο βαρίδια των 100 γραμμάρια το καθένα, και στον άλλο δίσκο υπάρχουν έξι. Επομένως, μπορούμε να αφαιρέσουμε δύο βαρίδια από κάθε δίσκο χωρίς να "χαλάσουμε" την ισορροπία της ζυγαριάς.