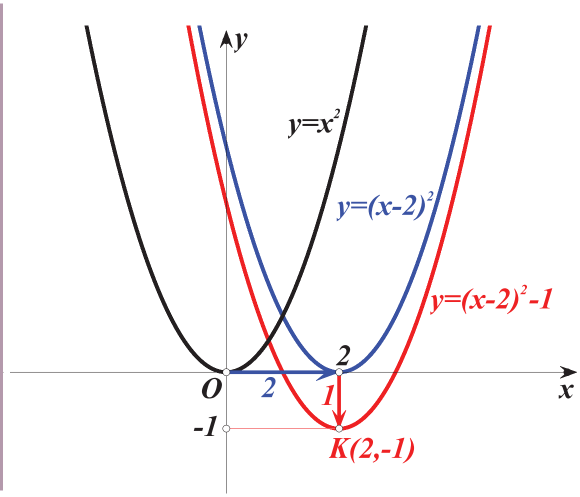
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων



Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σ. Ανδρεαδάκης Β. Κατσαργύρης Σ. Παπασταυρίδης
Γ. Πολύζος Α. Σβέρκος Λ. Αδαμόπουλος Χ. Δαμιανού

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου

Η συγγραφή και η επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
Κατσαργύρης Βασίλειος
Παπασταυρίδης Σταύρος
Πολύζος Γεώργιος
Σβέρκος Ανδρέας

ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός	*Ομοτ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών*
Κατσαργύρης Βασίλειος	*Καθηγητής Βαρβακείου Πειραματικού Λυκείου*
Παπασταυρίδης Σταύρος	*Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών*
Πολύζος Γεώργιος	*Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.*
Σβέρκος Ανδρέας	*Καθηγητής $2^{ου}$ Πειραματικού Λυκείου Αθηνών*

ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ Π.Ι.

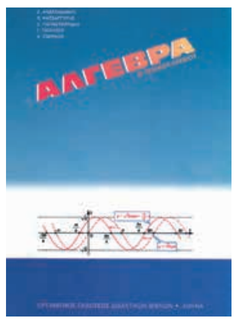
Σκούρας Αθανάσιος	*Σύμβουλος του Π.Ι.*
Πολύζος Γεώργιος	*Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.*

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΜΕΝΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Ελευθερόπουλος Ιωάννης	*Καθηγητής Μαθηματικών, Αποσπασμένος στο Π.Ι.*
Ζώτος Ιωάννης	*Καθηγητής Μαθηματικών, Αποσπασμένος στο Π.Ι.*
Καλλιπολίτου Ευρυδίκη	*Καθηγήτρια Μαθηματικών, Αποσπασμένη στο Π.Ι.*

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός	*Ομοτ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών*
Κατσαργύρης Βασίλειος	*Καθηγητής Βαρβακείου Πειραματικού Λυκείου*
Παπασταυρίδης Σταύρος	*Καθηγητής Πανεπιστημίου Πάτρας*
Πολύζος Γεώργιος	*Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.*
Σβέρκος Ανδρέας	*Καθηγητής $2^{ου}$ Πειραματικού Λυκείου Αθηνών*



Α′ ΕΚΔΟΣΗ: 1991
ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΕ ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ: 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998
Η προσαρμογή του βιβλίου στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα έγινε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Αδαμόπουλος Λεωνίδας	*Επ. Σύμβουλος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου*
Δαμιανού Χαράλαμπος	*Αναπλ. Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών*
Σβέρκος Ανδρέας	*Σχολικός Σύμβουλος*

ΚΡΙΤΕΣ:

Κουνιάς Στρατής	*Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών*
Μακρής Κωνσταντίνος	*Σχολικός Σύμβουλος*
Τσικαλουδάκης Γεώργιος	*Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης*

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

Μπουσούνη Λία	*Καθηγήτρια Β/θμιας Εκπαίδευσης*

ΔΑΚΤΥΛΟΓΡΑΦΗΣΗ: Μπολιώτη Πόπη

ΣΧΗΜΑΤΑ: Μπούτσικας Μιχάλης

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013

Οι αλλαγές που ενσωματώθηκαν στην παρούσα επανέκδοση έγιναν με βάση τις διορθώσεις του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιλαμβάνει την ύλη της Άλγεβρας και των Πιθανοτήτων που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών της Α΄ τάξης του Γενικού Λυκείου.

Το βιβλίο αυτό προήλθε από αναμόρφωση της Α΄ έκδοσης (2010) του βιβλίου ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ, του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος και Α. Σβέρκος. Προστέθηκαν επίσης δυο ακόμα κεφάλαια: το κεφάλαιο «Πιθανότητες» και το κεφάλαιο «Πρόοδοι».

Το κεφάλαιο «Πιθανότητες» είναι μέρος του αντίστοιχου κεφαλαίου από το βιβλίο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (2010) του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Λ. Αδαμόπουλος, Χ. Δαμιανού και Α. Σβέρκος. Το κεφάλαιο «Πρόοδοι» είναι μέρος του αντίστοιχου κεφαλαίου από το βιβλίο ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (2010), του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος και Α. Σβέρκος.

Το περιεχόμενο του βιβλίου περιλαμβάνει σε γενικές γραμμές τα εξής:

Στο **1ο Κεφάλαιο** γίνεται μια εισαγωγή στη Θεωρία των Πιθανοτήτων. Η απόδειξη των ιδιοτήτων της πιθανότητας ενός ενδεχομένου γίνεται μόνο στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Η Θεωρία των Πιθανοτήτων ασχολείται με καταστάσεις όπου υπάρχει αβεβαιότητα, και αυτό την κάνει ιδιαίτερα σημαντική στις εφαρμογές της καθημερινής ζωής.

Στο **2ο Κεφάλαιο** επαναλαμβάνονται, συμπληρώνονται και επεκτείνονται οι βασικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

Στο **3ο Κεφάλαιο** επαναλαμβάνονται, επεκτείνονται και εξετάζονται συστηματικά όσα είναι γνωστά από το Γυμνάσιο για τις εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού. Επίσης εξετάζονται εξισώσεις που, για να επιλυθούν, ανάγονται σε 1ου και 2ου βαθμού.

Στο **4ο Κεφάλαιο** παρουσιάζονται ανισώσεις 1ου και 2ου βαθμού καθώς και ανισώσεις που, για να επιλυθούν, ανάγονται σε 1ου και 2ου βαθμού.

Στο **5ο Κεφάλαιο** γίνεται εισαγωγή στην έννοια της ακολουθίας πραγματικών αριθμών, και εξετάζονται η αριθμητική και η γεωμετρική πρόοδος ως ειδικές περιπτώσεις κανονικότητας (pattern) σε ακολουθίες.

Στο **6ο Κεφάλαιο** εισάγεται η έννοια της συνάρτησης. Η συνάρτηση είναι μια θεμελιώδης έννοια που διαπερνά όλους τους κλάδους των Μαθηματικών και έχει κεντρική σημασία για την περαιτέρω ανάπτυξη και εφαρμογή τους.

Στο **7ο Κεφάλαιο** γίνεται μελέτη των συναρτήσεων $f(x)=\alpha x^2$, $f(x)=\frac{\alpha}{x}$ και $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Η μελέτη της $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι ο κεντρικός στόχος του κεφαλαίου αυτού.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ε.1 ΤΟ ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Στην παράγραφο αυτή θα γνωρίσουμε μερικές βασικές έννοιες της Λογικής, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, όπου αυτό κρίνεται αναγκαίο, για τη σαφέστερη διατύπωση μαθηματικών εννοιών, προτάσεων κτλ.
Τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιήσουμε αναφέρονται σε έννοιες και ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο.

Η συνεπαγωγή

Ας θεωρήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β. Είναι γνωστό ότι:

Αν οι αριθμοί α και β είναι ίσοι, τότε και τα τετράγωνά τους θα είναι ίσα.

Αυτό σημαίνει ότι:

Αν ο ισχυρισμός «$\alpha = \beta$» είναι αληθής, τότε και ο ισχυρισμός «$\alpha^2 = \beta^2$» θα είναι αληθής.

Γι' αυτό λέμε ότι ο ισχυρισμός «$\alpha = \beta$» <u>συνεπάγεται</u> τον ισχυρισμό «$\alpha^2 = \beta^2$» και γράφουμε: $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$.

Γενικά:

> Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P να αληθεύει και ο Q, τότε λέμε ότι **ο P συνεπάγεται τον Q** και γράφουμε $\mathbf{P \Rightarrow Q}$.

Ο ισχυρισμός «$\mathbf{P \Rightarrow Q}$» λέγεται **συνεπαγωγή** και πολλές φορές διαβάζεται **«αν P, τότε Q».** Ο P λέγεται **υπόθεση** της συνεπαγωγής, ενώ ο Q λέγεται **συμπέρασμα** αυτής[1].

---

[1] Στην καθημερινή πράξη, συνήθως, δεν χρησιμοποιούμε συνεπαγωγές με ψευδή υπόθεση. Αλλά και η μαθηματική επιστήμη δεν έχει ανάγκη τέτοιου είδους συνεπαγωγών. Όμως, για τεχνικούς λόγους που συνδέονται με την ευκολία της έκφρασης μαθηματικών ζητημάτων, θα υιοθετήσουμε τη <u>σύμβαση</u> ότι η συνεπαγωγή «$P \Rightarrow Q$» να είναι αληθής και στην περίπτωση που η υπόθεση P είναι ψευδής. Έτσι, η συνεπαγωγή «$P \Rightarrow Q$» είναι ψευδής, μόνο όταν η υπόθεση P είναι αληθής και το συμπέρασμα Q είναι ψευδές και αληθής σε κάθε άλλη περίπτωση. Εκ πρώτης όψεως η σύμβαση αυτή φαίνεται περίεργη, αλλά στο πλαίσιο του παρόντος βιβλίου δεν μπορούν να εξηγηθούν οι λόγοι που οδήγησαν σε αυτή.

Η ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή

Ας θεωρήσουμε τις γνωστές μας από το Γυμνάσιο συνεπαγωγές:

$$\alpha=\beta \Rightarrow \alpha^2=\beta^2 \qquad (1)$$

και

$$\alpha=\beta \Rightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma \qquad (2),$$

που ισχύουν για όλους τους πραγματικούς α, β και γ.

Παρατηρούμε ότι:

✓ Για την πρώτη συνεπαγωγή, δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή δεν ισχύει η συνεπαγωγή $\alpha^2=\beta^2 \Rightarrow \alpha=\beta$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β, αφού για παράδειγμα είναι $(-3)^2=3^2$, ενώ $-3\neq 3$.

✓ Για τη δεύτερη, όμως, συνεπαγωγή ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει και η συνεπαγωγή:

$$\alpha+\gamma=\beta+\gamma \Rightarrow \alpha=\beta$$

Γι' αυτό λέμε ότι οι δύο ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι και γράφουμε:

$$\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma.$$

Γενικά

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P, να αληθεύει και ο Q και όταν αληθεύει ο Q, να αληθεύει και ο P, τότε λέμε ότι **ο P συνεπάγεται τον Q και αντιστρόφως** ή, αλλιώς, ότι **ο P είναι ισοδύναμος με τον Q** και γράφουμε **P ⇔ Q**.

Ο ισχυρισμός **«P ⇔ Q»** λέγεται **ισοδυναμία** και αρκετές φορές διαβάζεται **«P αν και μόνο αν Q»**.

Ο σύνδεσμος «ή»

Γνωρίζουμε ότι:

Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς α και β είναι ίσος με το μηδέν.

Για να δηλώσουμε ότι ένας τουλάχιστον από τους α και β είναι ίσος με το μηδέν, γράφουμε α = 0 ή β = 0. Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία

$$\alpha\cdot\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ ή } \beta=0$$

Γενικά

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός **P ή Q** αληθεύει μόνο στην περίπτωση που ένας τουλάχιστον από τους δύο ισχυρισμούς αληθεύει.

Ο ισχυρισμός **«P ή Q»** λέγεται **διάζευξη** των P και Q.

Για παράδειγμα η εξίσωση

$$(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$$

αληθεύει, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες $x^2 - x$ και $x^2 - 1$ είναι ίσος με το μηδέν, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει η διάζευξη:

$$x^2 - x = 0 \text{ ή } x^2 - 1 = 0.$$

Παρατηρούμε εδώ ότι:

✓ Για $x = 1$ αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις, ενώ

✓ Για $x = 0$ αληθεύει μόνο η πρώτη και για $x = -1$ αληθεύει μόνο η δεύτερη.

Ο σύνδεσμος «και»

Γνωρίζουμε ότι:

«Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β είναι διάφορο του μηδενός, αν και μόνο αν και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός».

Για να δηλώσουμε ότι και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός γράφουμε

$$\alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Γενικά

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός **P και Q** αληθεύει μόνο στην περίπτωση που και οι δύο ισχυρισμοί αληθεύουν.

Ο ισχυρισμός **«P και Q»** λέγεται **σύζευξη** των P και Q.
Για παράδειγμα, ο ισχυρισμός

$$x(x - 1) = 0 \text{ και } (x - 1)(x + 1) = 0$$

αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις, δηλαδή για $x = 1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για <u>όλους</u> τους πραγματικούς αριθμούς α και β. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.

1.	$\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3$	Α	Ψ
2.	$\alpha^2 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$	Α	Ψ
3.	$\alpha^2 \neq \alpha \Rightarrow \alpha \neq 1$	Α	Ψ
4.	$\alpha \neq 2 \Leftrightarrow \alpha^2 \neq 4$	Α	Ψ
5.	$\alpha > 2 \Rightarrow \alpha^2 > 4$	Α	Ψ
6.	$\alpha < 2 \Rightarrow \alpha^2 < 4$	Α	Ψ
7.	$\alpha^2 < 4 \Rightarrow \alpha < 2$	Α	Ψ
8.	$\alpha^2 > 4 \Rightarrow \alpha > 2$	Α	Ψ
9.	$\alpha < 2$ και $\beta < 3 \Rightarrow \alpha \cdot \beta < 6$	Α	Ψ

II. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τους ισχυρισμούς της ομάδας Α′ με τον ισοδύναμό του ισχυρισμό από την ομάδα Β′.

Α′ ΟΜΑΔΑ	
1	$x(x-2)=0$
2	$x(x-2)\neq 0$
3	$x^2=4$
4	$x^2=4$ και $x<0$
5	$x(x-2)=0$ και $x(x-1)=0$
6	$x^2=4$ και $x>0$

Β′ ΟΜΑΔΑ	
Α	$x\neq 0$ και $x\neq 2$
Β	$x=2$
Γ	$x=-2$ ή $x=2$
Δ	$x=0$
Ε	$x=0$ ή $x=2$
Ζ	$x=-2$

Ε.2 ΣΥΝΟΛΑ

Η έννοια του συνόλου

Πολλοί άνθρωποι συνηθίζουν να συλλέγουν διάφορα πράγματα, όπως π.χ. γραμματόσημα, νομίσματα, πίνακες ζωγραφικής, εφημερίδες, βιβλία κτλ. Οι περισσότεροι συλλέκτες ταξινομούν τις συλλογές τους σε κατηγορίες, π.χ. «γραμματόσημα που προέρχονται από την ίδια χώρα», «νομίσματα του περασμένου αιώνα», «πίνακες της αναγέννησης» κτλ.
Επίσης από αρχαιοτάτων χρόνων οι άνθρωποι ενδιαφέρθηκαν για τους αριθμούς και τους ταξινόμησαν σε κατηγορίες, όπως είναι π.χ. «οι άρτιοι αριθμοί», «οι πρώτοι αριθμοί» κτλ.
Συλλογές ή κατηγορίες όπως οι παραπάνω ή ακόμη ομάδες αντικειμένων, ομοειδών ή όχι, που μπορούμε με κάποιο τρόπο να τα ξεχωρίσουμε, ονομάζονται στα Μαθηματικά **σύνολα**.

Σύμφωνα με τον μεγάλο μαθηματικό Cantor:

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

Τα αντικείμενα αυτά, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου.

ΣΧΟΛΙΟ

Ένα σύνολο πρέπει να είναι, όπως συνηθίζουμε να λέμε, «καλώς ορισμένο». Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία του μπορούν να αναγνωρίζονται με σιγουριά. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να μιλάμε για το σύνολο των μεγάλων πραγματικών αριθμών. Αυτό δεν είναι σύνολο, με τη μαθηματική έννοια του όρου, διότι δεν υπάρχει κανόνας που να καθορίζει αν ένας πραγματικός αριθμός είναι ή δεν είναι μεγάλος. Αν όμως θεωρήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 1000000, τότε αυτοί αποτελούν σύνολο.

Για να συμβολίσουμε ένα σύνολο στα Μαθηματικά, χρησιμοποιούμε ένα από τα κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφαβήτου, ενώ για τα στοιχεία του χρησιμοποιούμε τα μικρά γράμματα αυτών. Για παράδειγμα:

✓ με $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών,

✓ με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών,

✓ με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών και

✓ με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Τα σύμβολα $\in$ και $\notin$

Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου A, γράφουμε $x\in A$ και διαβάζουμε «το x ανήκει στο A», ενώ για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου A γράφουμε $x\notin A$ και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο A».

Για παράδειγμα

$$\frac{3}{5}\notin\mathbb{N},\quad \frac{3}{5}\in\mathbb{Q},\quad -2\in\mathbb{Z},\quad \sqrt{2}\notin\mathbb{Q},\quad \sqrt{2}\in\mathbb{R} \text{ κτλ.}$$

Παράσταση συνόλου

Για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε συνήθως έναν από τους παρακάτω τρόπους:

α) Όταν δίνονται όλα τα στοιχεία του και είναι λίγα σε πλήθος, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ δύο αγκίστρων, χωρίζοντάς τα με το κόμμα. Έτσι π.χ., αν το σύνολο A έχει ως στοιχεία τους αριθμούς 2, 4 και 6, γράφουμε:

$$A=\{2, 4, 6\}$$

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε έναν παρόμοιο συμβολισμό και για σύνολα που έχουν πολλά ή άπειρα στοιχεία, γράφοντας μερικά μόνο από αυτά και αποσιωπώντας τα υπόλοιπα, αρκεί να είναι σαφές ποια είναι αυτά που παραλείπονται. Έτσι για παράδειγμα το σύνολο B των ακεραίων από το 1 μέχρι το 100 συμβολίζεται ως εξής

$$B=\{1, 2, 3, \dots, 100\},$$

ενώ το σύνολο των κλασμάτων της μορφής $\frac{1}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος, συμβολίζεται ως εξής:

$$\Gamma=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με **αναγραφή** των στοιχείων του».

β) Αν από το σύνολο των πραγματικών αριθμών επιλέξουμε εκείνους που έχουν την ιδιότητα να είναι θετικοί, τότε φτιάχνουμε το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών, το οποίο συμβολίζεται με:

$$\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\}$$

και διαβάζεται «Το σύνολο των $x\in\mathbb{R}$, όπου $x>0$».

Ομοίως το σύνολο των άρτιων ακεραίων συμβολίζεται

$$\{x\in\mathbb{Z} \mid x \text{ άρτιος}\}$$

Γενικά, αν από ένα σύνολο Ω επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα Ι, τότε φτιάχνουμε ένα νέο σύνολο που συμβολίζεται με:

$$\{x \in \Omega | x \text{ έχει την ιδιότητα Ι}\}$$

και διαβάζεται «Το σύνολο των $x \in \Omega$, όπου x έχει την ιδιότητα Ι».
Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με **περιγραφή** των στοιχείων του».

Ίσα σύνολα

Ας θεωρήσουμε τώρα τα σύνολα:

$$A = \{1, 2\} \text{ και } B = \{x \in \mathbb{R} | (x-1)(x-2) = 0\}$$

Επειδή οι λύσεις της εξίσωσης $(x-1)(x-2) = 0$ είναι οι αριθμοί 1 και 2, το σύνολο Β έχει τα ίδια ακριβώς στοιχεία με το Α. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι τα σύνολα Α και Β είναι ίσα.

Γενικά

Δύο σύνολα Α και Β λέγονται **ίσα**, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Με άλλα λόγια:
«Δύο σύνολα Α και Β λέγονται ίσα, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β και αντιστρόφως κάθε στοιχείο του Β είναι και στοιχείο του Α».
Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\mathbf{A = B}$.

Υποσύνολα συνόλου

Ας θεωρήσουμε τα σύνολα

$$A=\{1, 2, 3, \ldots, 15\} \text{ και } B=\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το Α είναι υποσύνολο του Β.

Γενικά

Ένα σύνολο Α λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\mathbf{A \subseteq B}$.
Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι:
i) $A \subseteq A$, για κάθε σύνολο Α.
ii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$.
iii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$.