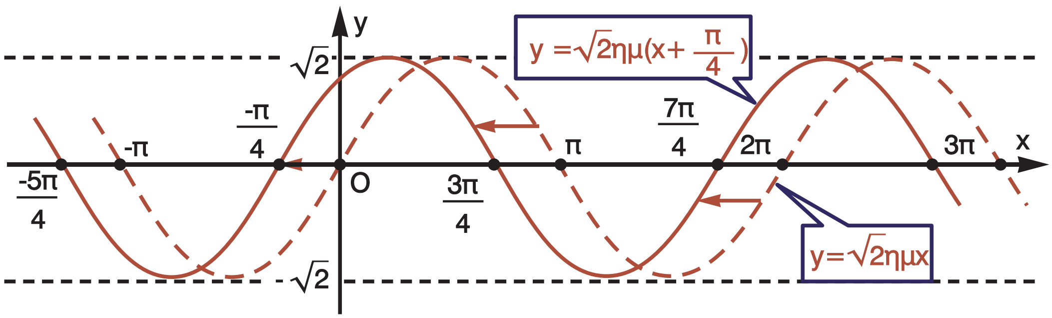
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ



Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΑΛΓΕΒΡΑ

Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Συγγραφική ομάδα:

Ανδρεαδάκης Στυλιανός	• Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Κατσαργύρης Βασίλειος	• Καθηγητής μαθηματικών Βαρβακείου Πειραμ. Λυκείου
Παπασταυρίδης Σταύρος	• Καθηγητής Πανεπιστημίου Πάτρας
Πολύζος Γεώργιος	• Καθηγητής μαθηματικών Β΄ Λυκείου Αμαρουσίου
Σβέρκος Ανδρέας	• Καθηγητής μαθηματικών Β΄ Λυκείου Αγ. Παρασκευής

Α΄ ΕΚΔΟΣΗ: 1991

ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΕ ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ: 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 2012

Η προσαρμογή του βιβλίου στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα έγινε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Οι αλλαγές που ενσωματώθηκαν στην παρούσα επανέκδοση έγιναν με βάση τις διορθώσεις του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ, Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ, Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ, Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

Η συγγραφή και η επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΑΛΓΕΒΡΑ

Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιλαμβάνει την ύλη της Άλγεβρας για τη Β΄ τάξη του Γενικού Λυκείου.

Το βιβλίο αυτό προήλθε από αναμόρφωση της έκδοσης (2010) του βιβλίου ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ, του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος και Α. Σβέρκος. Από το βιβλίο αυτό αφαιρέθηκε το κεφάλαιο «Πρόοδοι» και προστέθηκαν δύο κεφάλαια: το κεφάλαιο «Συστήματα» και το κεφάλαιο «Ιδιότητες Συναρτήσεων», τα οποία προέρχονται από το βιβλίο ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (2010), του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος και Α. Σβέρκος. Επίσης το κεφάλαιο «Τριγωνομετρία» του βιβλίου ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (2010), εμπλουτίστηκε με το κεφάλαιο «Τριγωνομετρία» του βιβλίου ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (2010).

Το περιεχόμενο του βιβλίου περιλαμβάνει σε γενικές γραμμές τα εξής:

Στο **1ο Κεφάλαιο** γίνεται μια επανάληψη των γραμμικών συστημάτων δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τα οποία οι μαθητές έχουν μελετήσει στο Γυμνάσιο, και εισάγεται η χρήση της ορίζουσας για την επίλυση και διερεύνηση τέτοιων συστημάτων. Επίσης, επιλύονται και γραμμικά συστήματα με τρεις αγνώστους καθώς και μη γραμμικά συστήματα.

Στο **2ο Κεφάλαιο** εξετάζονται ιδιότητες των συναρτήσεων και των γραφικών παραστάσεών τους, όπως η μονοτονία, τα ακρότατα και οι συμμετρίες μιας συνάρτησης, καθώς και η κατακόρυφη και οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

Στο **3ο Κεφάλαιο** επεκτείνονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί με την εισαγωγή του τριγωνομετρικού κύκλου και αποδεικνύονται στη γενικότητά τους οι τριγωνομετρικές ταυτότητες. Επίσης, ορίζονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, γίνεται η σύνδεση αυτών με φαινόμενα που εμφανίζουν περιοδικότητα και επιλύονται τριγωνομετρικές εξισώσεις. Τέλος χρησιμοποιούνται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών τριγώνου για τον υπολογισμό των στοιχείων του.

Στο **4ο Κεφάλαιο** τίθενται οι βάσεις για μια πιο συστηματική μελέτη των πολυωνύμων και αναπτύσσονται διάφορες μέθοδοι επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων και ανισώσεων.

Στο **5ο Κεφάλαιο** εισάγονται η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση, οι οποίες έχουν σημαντικές εφαρμογές σε διάφορα επιστημονικά πεδία.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1ο

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η εξίσωση αx + βy = γ

Στο Γυμνάσιο διαπιστώσαμε με τη βοήθεια παραδειγμάτων ότι η εξίσωση

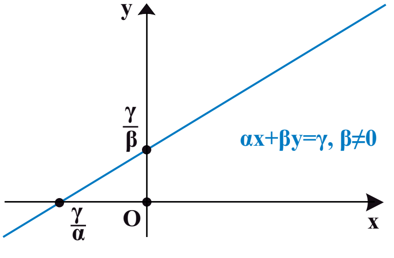
$$\alpha x + \beta y = \gamma, \ \text{με } \alpha \neq 0 \ \text{ή} \ \beta \neq 0,$$

που λέγεται **γραμμική εξίσωση**, παριστάνει ευθεία γραμμή. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το συμπέρασμα αυτό ως εξής:
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

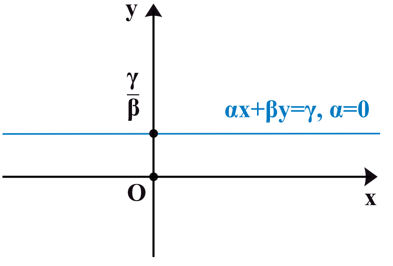
- Αν **β ≠ 0**, τότε η εξίσωση γράφεται:

$$\alpha x + \beta y = \gamma \Leftrightarrow \beta y = -\alpha x + \gamma$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta},$$

Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$ και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο $\frac{\gamma}{\beta}$.



Σχήμα α΄

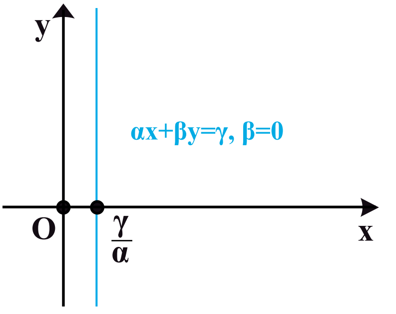


Σχήμα β΄

Ειδικότερα:

✓ Αν **α ≠ 0**, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες (Σχ. α΄), ενώ

✓ Αν $\boldsymbol{\alpha = 0}$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y = \frac{\gamma}{\beta}$ και επομένως παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x'x και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο $\frac{\gamma}{\beta}$ (Σχ. β΄).

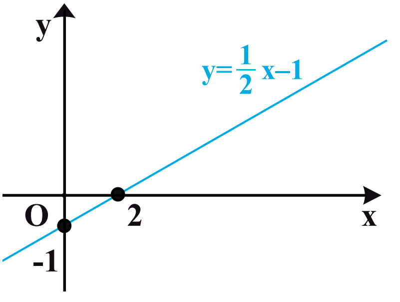


- Αν $\boldsymbol{\beta = 0}$ (οπότε $\alpha \neq 0$), τότε η εξίσωση γράφεται

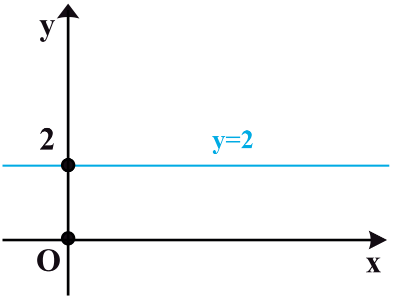
$$\alpha x = \gamma \Leftrightarrow x = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y'y και τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο $\frac{\gamma}{\alpha}$.

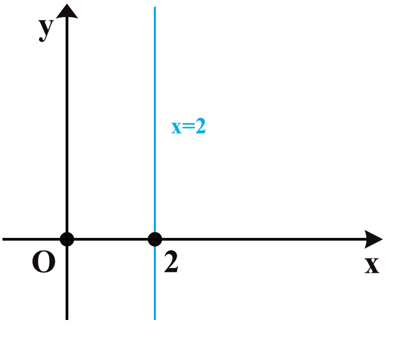
Για παράδειγμα:



✓ Η εξίσωση $x - 2y = 2$ παίρνει τη μορφή $y = \frac{1}{2}x - 1$ η οποία παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{1}{2}$ και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο -1.



✓ Η εξίσωση $y = 2$ παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x'x και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο 2 .



✓ Η εξίσωση $x = 2$ παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y'y και τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο 2.

Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει μία γραμμική εξίσωση λέγεται **λύση της γραμμικής εξίσωσης**.

Για παράδειγμα, το ζεύγος (4, –1) είναι λύση της εξίσωσης $x-2y=6$, αφού $4-2(-1)=4+2=6$. Διαπιστώνουμε, όμως, ότι και τα ζεύγη (16,5), $(-10,-8)$ είναι λύσεις της εξίσωσης και γενικά ότι κάθε ζεύγος της μορφής $\left(k, \frac{1}{2}k-3\right)$, $k \in \mathbb{R}$ είναι λύση της εξίσωσης.

Γραμμικό σύστημα 2 x 2

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις αx+βy=γ και α΄x+β΄y=γ΄ και ζητάμε τις κοινές λύσεις αυτών, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους** ή, πιο σύντομα, ένα **γραμμικό σύστημα 2 x 2** και γράφουμε

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$$

Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται **λύση του συστήματος**.

Στο Γυμνάσιο μάθαμε μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος γίνεται με κατάλληλη μετατροπή του σε άλλο γραμμικό σύστημα το οποίο έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με το αρχικό. Τα δύο αυτά συστήματα λέγονται **ισοδύναμα συστήματα**.

Η μετατροπή ενός συστήματος σε ισοδύναμό του γίνεται συνήθως με έναν από τους εξής δύο τρόπους:

- Λύνουμε τη μια εξίσωση του συστήματος ως προς έναν άγνωστο και τον αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση.
- Αντικαθιστούμε μια από τις εξισώσεις (ε) ή (ε') του συστήματος, π.χ. την (ε), με την εξίσωση « $\lambda\cdot(\varepsilon)+\lambda'\cdot(\varepsilon')$ » που προκύπτει, αν στα μέλη της (ε) πολλαπλασιασμένα με $\lambda \neq 0$, προσθέσουμε τα μέλη της (ε') πολλαπλασιασμένα με λ'.

  Η εξίσωση $\lambda\cdot(\varepsilon)+\lambda'\cdot(\varepsilon')$ λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** των εξισώσεων (ε) και (ε').

Η απόδειξη του ότι τα συστήματα που προκύπτουν από τις παραπάνω μετατροπές είναι ισοδύναμα στηρίζεται στις παρακάτω ιδιότητες της ισότητας που είδαμε στο 2ο κεφάλαιο του βιβλίου της Α΄ Λυκείου:

✓ Αν $\gamma\neq0$, τότε: $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma=\beta\gamma$

✓ Αν α=β και γ=δ , τότε α+γ = β+δ.

Έστω, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x-2y=6 & (1) \\ 3x+4y=8 & (2) \end{cases}$$

Θα λύσουμε το σύστημα με τις δύο μεθόδους που μάθαμε στο Γυμνάσιο, τη μέθοδο της **αντικατάστασης** και τη μέθοδο των **αντιθέτων συντελεστών** (ή μέθοδο της απαλοιφής)

<u>Μέθοδος της αντικατάστασης</u>

Λύνουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο, π.χ. την (1) ως προς x. Έτσι το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x = 2y + 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση το x με την παράσταση που βρήκαμε και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει

$$\begin{aligned} 3(2y+6)+4y=8 &\Leftrightarrow 6y+18+4y=8 \\ &\Leftrightarrow 10y=-10 \\ &\Leftrightarrow y=-1 \end{aligned}$$

Έτσι το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x = 2y + 6 \\ y = -1 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του y στην πρώτη εξίσωση και υπολογίζουμε τον άλλο άγνωστο:

$$x = 2(-1) + 6 = 4$$

Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(4,-1)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Επειδή κάνουμε πολλά βήματα μέχρι να λύσουμε ένα σύστημα, είναι πολύ πιθανό να κάνουμε λάθος στους αριθμητικούς υπολογισμούς. Για το λόγο αυτό είναι σκόπιμο να αντικαθιστούμε τις τιμές των αγνώστων που βρήκαμε στις αρχικές εξισώσεις του συστήματος και να ελέγχουμε αν τις επαληθεύουν, δηλαδή να κάνουμε **επαλήθευση του συστήματος**.

Στο συγκεκριμένο σύστημα, για $x = 4$ και $y=-1$, έχουμε:

<u>1η εξίσωση:</u> $4 - 2(-1) = 6$

<u>2η εξίσωση:</u> $3\cdot 4 + 4(-1) = 12 - 4 = 8$

<u>Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών (ή της απαλοιφής)</u>

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς, ώστε οι συντελεστές του ενός αγνώστου στις εξισώσεις που θα προκύψουν να είναι αντίθετοι:

$$\begin{cases} x-2y=6 \\ 3x+4y=8 \end{cases} \left|\begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \cdot 1 \end{array}\right. \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \begin{cases} -3x+6y=-18 \\ 3x+4y=8 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις που βρήκαμε, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και επιλύουμε:

$$-3x+6y+3x+4y=-18+8 \Leftrightarrow 10y=-10 \Leftrightarrow y=-1 \ .$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μια από τις αρχικές εξισώσεις και βρίσκουμε την τιμή του άλλου:

$$x-2(-1)=6 \Leftrightarrow x+2=6 \Leftrightarrow x=4 \ .$$

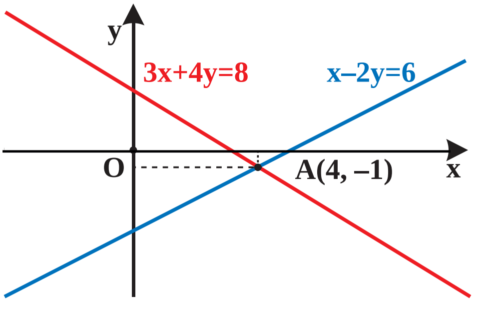
Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(4,-1)$ (η ίδια φυσικά που βρέθηκε και με την προηγούμενη μέθοδο).

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος 2 x 2

Κάθε εξίσωση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{cases} x-2y=6 \\ 3x+4y=8 \end{cases}$$

που λύσαμε προηγουμένως παριστάνει μια ευθεία γραμμή. Το σημείο τομής των ευθειών αυτών προσδιορίζει τη λύση του συστήματος, αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν συγχρόνως τις δύο εξισώσεις του συστήματος.



Γενικά, μπορούμε να επιλύσουμε γραφικά ένα γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$$

με το να σχεδιάσουμε τις δύο ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του και να βρούμε, εφόσον υπάρχει, το σημείο τομής τους.

Η γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 δίνει λύσεις που μπορεί να είναι προσεγγιστικές. Παρά την αδυναμία αυτή, η γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 διευκολύνει πάρα πολύ σε περιπτώσεις, όπου μας ενδιαφέρουν μόνο προσεγγιστικές λύσεις του συστήματος ή, ακόμη, όταν η αλγεβρική του επίλυση είναι δυσχερής.

Οι δύο εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 παριστάνουν δύο ευθείες οι οποίες μπορεί να τέμνονται ή να είναι παράλληλες ή ακόμα και να συμπίπτουν.

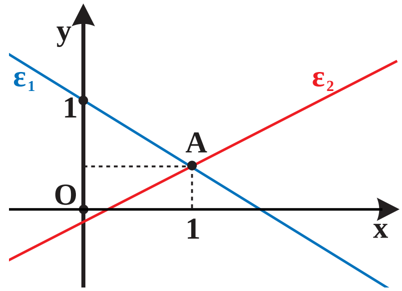
Για παράδειγμα:

✓ Το σύστημα $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ 4x-9y=1 \end{cases}$ γράφεται $\begin{cases} y=-\dfrac{2}{3}x+1 \\ y=\dfrac{4}{9}x-\dfrac{1}{9} \end{cases}$ και <u>έχει μοναδική λύση</u>,

αφού οι δύο ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του τέμνονται, επειδή έχουν διαφορετικούς συντελεστές διεύθυνσης.

Αν χαράξουμε τις ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις, βλέπουμε ότι προσεγγιστικά η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(1,\, 0{,}3)$.

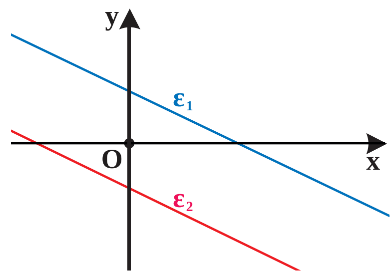
Αν όμως λύσουμε το σύστημα αλγεβρικά, θα βρούμε ότι η ακριβής λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$.



✓ Το σύστημα $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=-5 \end{cases}$ γράφεται

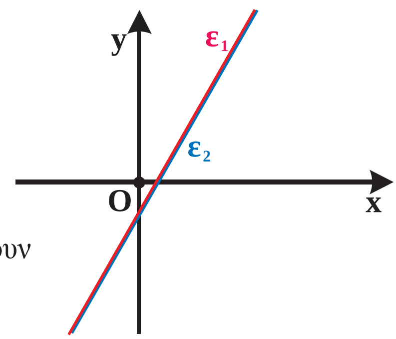
$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{4} \end{cases}$, οπότε είναι <u>αδύνατο</u>,

αφού οι δύο ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του είναι παράλληλες.



✓ Το σύστημα $\begin{cases} y+1=2x \\ 4x-2y=2 \end{cases}$ γράφεται

$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x-1 \end{cases}$, οπότε <u>έχει άπειρο πλήθος λύσεων</u>, αφού οι δύο ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος συμπίπτουν.



Προφανώς κάθε λύση του συστήματος είναι της μορφής $(k, 2k-1),\ k \in \mathbb{R}$.

Γενικά, από την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 αναμένουμε μια μόνο από τις περιπτώσεις:

✓ Το σύστημα να έχει μοναδική λύση

✓ Το σύστημα να είναι αδύνατο

✓ Το σύστημα να έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Λύση – διερεύνηση γραμμικού συστήματος 2 x 2

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 στη γενική του μορφή.
Έστω λοιπόν το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

Αρχικά θα εξετάσουμε την περίπτωση που είναι $\beta \neq 0$ και $\beta' \neq 0$. Τότε το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{\alpha}{\beta}x + \dfrac{\gamma}{\beta} \qquad (\varepsilon_1) \\[2ex] y = -\dfrac{\alpha'}{\beta'}x + \dfrac{\gamma'}{\beta'} \qquad (\varepsilon_2) \end{cases}$$

και οι εξισώσεις του παριστάνουν ευθείες ε_1 και ε_2 με αντίστοιχους συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = -\dfrac{\alpha}{\beta}$ και $\lambda_2 = -\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

- Αν $-\dfrac{\alpha}{\beta} \neq -\dfrac{\alpha'}{\beta'}$, δηλαδή αν $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν διαφορετικούς συντελεστές διεύθυνσης, οπότε τέμνονται σε ένα σημείο του οποίου η τετμημένη προσδιορίζεται από τη λύση της εξίσωσης

$$-\frac{\alpha'}{\beta'}x + \frac{\gamma'}{\beta'} = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha'}{\beta'}\right)x = \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\gamma'}{\beta'}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha\beta' - \alpha'\beta)x = \gamma\beta' - \gamma'\beta$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$$

Η τεταγμένη του σημείου τομής είναι:

$$y = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}\right) + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{-\alpha\gamma\beta' + \alpha\beta\gamma' + \gamma\alpha\beta' - \gamma\alpha'\beta}{\beta(\alpha\beta' - \alpha'\beta)}$$

$$= \frac{\beta(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)}{\beta(\alpha\beta' - \alpha'\beta)}$$