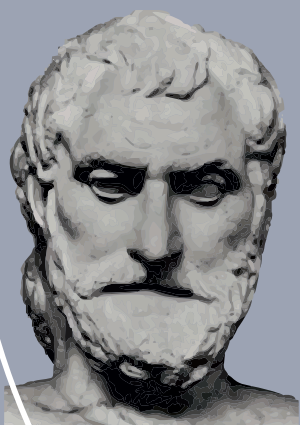


Μαθηματικά

Β' μέρος



Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Τάξης

Γενικού Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών
και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

B' ΜΕΡΟΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
Κατσαργύρης Βασίλειος
Μέτης Στέφανος
Μπρουχούτας Κων/νος
Παπασταυρίδης Σταύρος
Πολύζος Γεώργιος

- Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
- Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης
- Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης
- Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης
- Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
- Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

Θωμαΐδης Ιωάννης

- Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
Κατσαργύρης Βασίλειος
Μέτης Στέφανος
Μπρουχούτας Κων/νος
Πολύζος Γεώργιος

ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟΥ

Αδαμόπουλος Λεωνίδα

- Επίτιμος Σύμβουλος του Π.Ι.

Δακτυλογράφηση:
Σχήματα:

Γαρδέρη Ρόζα
Μπούτσικας Μιχάλης

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Τάξης

Γενικού Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών
και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

B' ΜΕΡΟΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Μέτης Στέφανος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Μπρουχούτας Κων/νος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Παπασταυρίδης Σταύρος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Πολύζος Γεώργιος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιλαμβάνει την ύλη των Μαθηματικών, όπως προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου.

Το βιβλίο αυτό προήλθε από αναμόρφωση του βιβλίου των Μαθηματικών της 2ης και της 4ης δέσμης της Γ΄ τάξης του Γενικού Λυκείου και αποτελείται από δύο μέρη.

- Το πρώτο μέρος, που φέρει τον τίτλο ΑΛΓΕΒΡΑ, αποτελείται από δυο κεφάλαια. — Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί μια εισαγωγή στη Θεωρία των Πινάκων, η οποία μεταξύ άλλων είναι ένα εργαλείο για τη μελέτη των Γεωμετρικών Μετασχηματισμών και των Γραμμικών Συστημάτων, τα οποία μελετώνται στο ίδιο κεφάλαιο.

- Το δεύτερο κεφάλαιο εισάγει στους Μιγαδικούς Αριθμούς, οι οποίοι είναι προέκταση των Πραγματικών Αριθμών. Οι Μιγαδικοί Αριθμοί ανακαλύφθηκαν την περίοδο της Αναγέννησης στην προσπάθεια επίλυσης εξισώσεων τρίτου βαθμού. Όμως, στους αιώνες που ακολούθησαν αποδείχτηκε η μεγάλη σημασία τους για πάρα πολλά προβλήματα της μαθηματικής επιστήμης και των εφαρμογών της.

Το κεφάλαιο αυτό έχει ληφθεί από το βιβλίο των Μαθηματικών Θετικής Κατεύθυνσης Β΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου των συγγραφέων: Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α.

- Το δεύτερο μέρος, που φέρει τον τίτλο ΑΝΑΛΥΣΗ, αποτελείται από τρία κεφάλαια.

- Το πρώτο κεφάλαιο σηματοδοτεί ένα νέο ξεκίνημα. Είναι το πέρασμα από τις πεπερασμένες πράξεις στις «άπειρες διαδικασίες». Τα σπέρματα της έννοιας του ορίου υπάρχουν ασφαλώς με πολύ σαφή και συγκεκριμένο τρόπο στα γραπτά του Αρχιμήδη. Η ανάπτυξη, όμως, αυτής της έννοιας έγινε στα χρόνια της Αναγέννησης και έκτοτε κατέχει κεντρική θέση στον κόσμο των μαθηματικών εννοιών.

Κατ' αρχάς στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται βασικές – και ήδη γνωστές στους μαθητές – έννοιες των συναρτήσεων, καθώς και μερικές ακόμη βασικές έννοιες της Ανάλυσης. Στη συνέχεια εισάγεται η έννοια του ορίου στο $x_0 \in \mathbb{R}$, η έννοια του ορίου στο $+\infty$ και στο $-\infty$ και δίνονται οι πιο χαρακτηριστικές ιδιότητές του. Τέλος, δίνεται η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης και παρουσιάζονται οι βασικότερες ιδιότητές της.

- Στο δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος αντιστοίχως και γίνεται χρήση των εννοιών αυτών σε πολλές εφαρμογές. Η παράγωγος και το ολοκλήρωμα είναι κατά κάποιο τρόπο οι δύο διαφορετικές όψεις του ίδιου νομίσματος. Σε μια έκφρασή τους είναι η κλίση της

εφαπτομένης και το εμβαδόν, σε άλλη η ταχύτητα και το μήκος της τροχιάς ενός κινητού κτλ.

Αυτό το βιβλίο ως ανθρώπινο δημιούργημα δεν είναι τέλειο. Ο μόνος τρόπος για να έχουμε στα σχολεία μας ύστερα από μερικά χρόνια ένα καλύτερο μέσο διδασκαλίας είναι ο νηφάλιος και ελεύθερος διάλογος, τον οποίο η επιστημονική παράδοση έχει καθιερώσει για αιώνες τώρα. Γι' αυτό το λόγο η συγγραφική ομάδα με ιδιαίτερη ικανοποίηση θα δέχεται σχόλια και παρατηρήσεις για το βιβλίο από οποιονδήποτε – συνάδελφο, μαθητή ή άλλο πολίτη – ενδιαφέρεται για τα ζητήματα της παιδείας. Τα σχόλια και οι παρατηρήσεις μπορούν να αποστέλλονται στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Μεσογείων 396, 153 10 Αγία Παρασκευή.

Οι Συγγραφείς

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Β' ΜΕΡΟΣ (ΑΝΑΛΥΣΗ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: Όριο - συνέχεια συνάρτησης	Σελ.
1.1 Πραγματικοί Αριθμοί	11
1.2 Συναρτήσεις	14
1.3 Μονότονες συναρτήσεις - Αντίστροφη συνάρτηση	30
1.4 Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbf{R}$	39
1.5 Ιδιότητες των ορίων	47
1.6 Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbf{R}$	58
1.7 Όριο συνάρτησης στο άπειρο	64
1.8 Συνέχεια συνάρτησης	70
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: Διαφορικός Λογισμός	
2.1 Η έννοια της παραγώγου	91
2.2 Παραγωγίσιμες συναρτήσεις - Παράγωγος συνάρτησης	104
2.3 Κανόνες παραγώγισης	111
2.4 Ρυθμός μεταβολής	123
2.5 Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού	127
2.6 Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής	132
2.7 Τοπικά ακρότατα συνάρτησης	140
2.8 Κυρτότητα - σημεία καμπής συνάρτησης	154
2.9 Ασύμπτωτες - Κανόνες De L' Hospital	161
2.10 Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης	169
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: Ολοκληρωτικός Λογισμός	
3.1 Αόριστο ολοκλήρωμα	185
3.2 Μέθοδοι ολοκλήρωσης	191
3.3 Διαφορικές εξισώσεις	200
3.4 Ορισμένο ολοκλήρωμα	208
3.5 Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$	215
3.6 Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού	222
3.7 Εμβαδόν επιπέδου χωρίου	224
ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ	247

B' ΜΕΡΟΣ

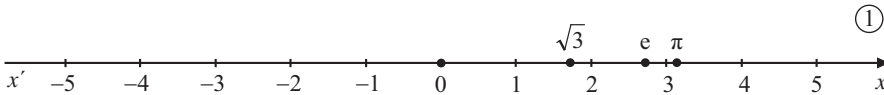
ΑΝΑΛΥΣΗ

1 ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1.1 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο \mathbf{R} των πραγματικών αριθμών αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και παριστάνεται με τα σημεία ενός άξονα, του άξονα των πραγματικών αριθμών. (Σχ. 1)



Ρητοί αριθμοί λέγονται οι αριθμοί που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α , β ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με \mathbf{Q} .

Είναι, δηλαδή,

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \mid \alpha, \beta \text{ ακέραιοι με } \beta \neq 0 \right\}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο των ακέραιων αριθμών είναι το

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

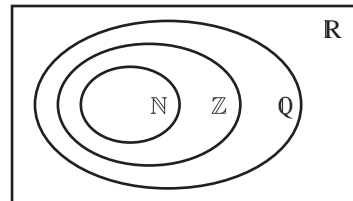
ενώ το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι το

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Για τα σύνολα \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{Q} και \mathbf{R} ισχύει:

$$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}.$$

Τα σύνολα $\mathbf{N} - \{0\}$, $\mathbf{Z} - \{0\}$, $\mathbf{Q} - \{0\}$ και $\mathbf{R} - \{0\}$ τα συμβολίζουμε συντομότερα με \mathbf{N}^* , \mathbf{Z}^* , \mathbf{Q}^* και \mathbf{R}^* αντίστοιχως.



Πράξεις και διάταξη στο \mathbf{R}

Στο σύνολο \mathbf{R} των πραγματικών αριθμών ορίστηκαν οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και με τη βοήθειά τους η αφαίρεση και η διαίρεση. Οι ιδιότητες των πράξεων αυτών είναι γνωστές από προηγούμενες τάξεις. Στη συνέχεια ορίστηκε η έννοια της διάταξης, οι σπουδαιότερες ιδιότητες της οποίας είναι οι:

$$1) \text{ Αν } \alpha \geq \beta \text{ και } \beta \geq \gamma, \text{ τότε } \alpha \geq \gamma$$

$$2) \alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma \geq \beta + \gamma$$

$$3) \begin{cases} \alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma \geq \beta\gamma, \text{ όταν } \gamma > 0 \\ \text{ενώ} \\ \alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma \leq \beta\gamma, \text{ όταν } \gamma < 0 \end{cases}.$$

$$4) \begin{cases} \text{Αν } \alpha \geq \beta \text{ και } \gamma \geq \delta, \text{ τότε } \alpha + \gamma \geq \beta + \delta \\ \text{Αν } \begin{pmatrix} \alpha \geq \beta \text{ και } \gamma \geq \delta \\ \text{και} \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0 \end{pmatrix}, \text{ τότε } \alpha\gamma \geq \beta\delta. \end{cases}$$

5) Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και $v \in \mathbb{N}^*$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha^v \geq \beta^v$$

$$6) \frac{\alpha}{\beta} \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha\beta \geq 0 \text{ και } \beta \neq 0)$$

7) Αν $\alpha\beta > 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\beta}.$$

Διαστήματα πραγματικών αριθμών

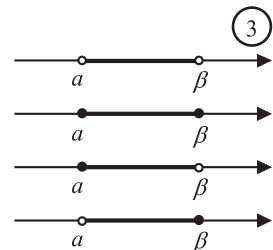
• Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ με $\alpha < \beta$, τότε ονομάζουμε **διαστήματα με άκρα τα α, β** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

$$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbf{R} \mid \alpha < x < \beta\}: \text{ανοικτό διάστημα}$$

$$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbf{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}: \text{κλειστό διάστημα}$$

$$[\alpha, \beta) = \{x \in \mathbf{R} \mid \alpha \leq x < \beta\}: \text{κλειστό-ανοικτό διάστημα}$$

$$(\alpha, \beta] = \{x \in \mathbf{R} \mid \alpha < x \leq \beta\}: \text{ανοικτό-κλειστό διάστημα.}$$



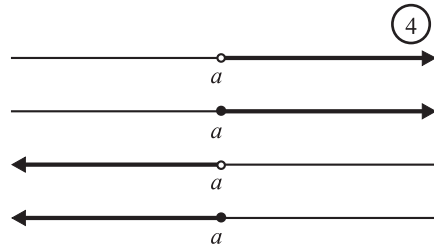
• Αν $a \in \mathbf{R}$, τότε ονομάζουμε **μη φραγμένα διαστήματα με άκρο το a** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

$$(\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > \alpha\}$$

$$[\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq \alpha\}$$

$$(-\infty, \alpha) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < \alpha\}$$

$$(-\infty, \alpha] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq \alpha\}$$



Υπό μορφή διαστήματος το σύνολο \mathbf{R} το συμβολίζουμε με $(-\infty, +\infty)$.

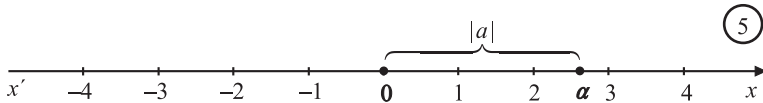
Τα σημεία ενός διαστήματος Δ , που είναι διαφορετικά από τα άκρα του, λέγονται **εσωτερικά σημεία** του Δ .

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

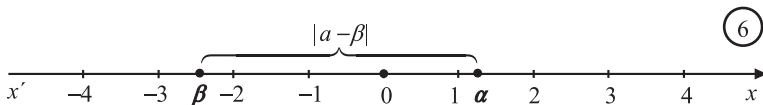
Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α , που συμβολίζεται με $|\alpha|$, ορίζεται ως εξής:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Γεωμετρικά, η απόλυτη τιμή του α παριστάνει την απόσταση του αριθμού α από το μηδέν,



ενώ η απόλυτη τιμή του $\alpha - \beta$ παριστάνει την **απόσταση των αριθμών α και β** .



Μερικές από τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής είναι οι εξής:

1) $|\alpha|^2 = \alpha^2$

2) $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

3) $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

4) $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

5) $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ 6) $|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \delta > 0$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να γραφούν υπό μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων τα σύνολα:

$$\text{i) } A = \left\{ x \mid \frac{1}{x} \leq 1 \right\} \quad \text{ii) } A = \left\{ x \mid \left| \frac{1}{x} - 2 \right| < 1 \right\}.$$

ΛΥΣΗ

i) Είναι

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \leq 1 &\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x-1}{x} \\ &\Leftrightarrow x(x-1) \geq 0 \text{ και } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x \geq 1. \end{aligned}$$

Άρα $A = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$.

ii) Είναι

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} - 2 \right| < 1 &\Leftrightarrow -1 < \frac{1}{x} - 2 < 1 \\ &\Leftrightarrow 1 < \frac{1}{x} < 3 \\ &\Leftrightarrow 1 > x > \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Άρα $A = \left(\frac{1}{3}, 1 \right)$.

1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης είναι γνωστή από προηγούμενες τάξεις. Στην παράγραφο αυτή υπενθυμίζουμε τον ορισμό της πραγματικής συνάρτησης με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του \mathbf{R} , επαναλαμβάνουμε γνωστές έννοιες και τέλος ορίζουμε πράξεις μεταξύ των πραγματικών συναρτήσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω A ένα υποσύνολο του \mathbf{R} . Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}$$

$$x \rightarrow f(x).$$

- Το γράμμα x , που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y , που παριστάνει την τιμή της f στο x , λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.
- Το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με D_f .
- Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Στα επόμενα και σε όλη την έκταση του βιβλίου :

- Θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα ή ένωση διαστημάτων**.
- Όταν θα λέμε ότι “**Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ’ ένα σύνολο B** ”, θα εννοούμε ότι το B είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Στην περίπτωση αυτή με $f(B)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των τιμών της f σε κάθε $x \in B$. Είναι δηλαδή:

$$f(B) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in B\}.$$

Συνομογραφία συνάρτησης

Είδαμε παραπάνω ότι για να οριστεί μια συνάρτηση f αρκεί να δοθούν δύο στοιχεία:

- το πεδίο ορισμού της και
- η τιμή της, $f(x)$, για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Συνήθως, όμως, αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνο τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το $f(x)$. Σε μια τέτοια περίπτωση θα *θεωρούμε συμβατικά* ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x , για τους οποίους το $f(x)$ έχει νόημα. Έτσι, για παράδειγμα, αντί να λέμε “δίνεται η συνάρτηση $f : (-\infty, 2] \rightarrow \mathbf{R}$,