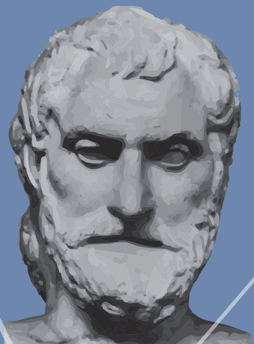
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

# Μαθηματικά
## Β΄ μέρος



## Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών
και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

# Λύσεις των ασκήσεων

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Γ΄ Τάξης

Γενικού Λυκείου

Θετική και Τεχνολογική

Κατεύθυνση

## ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

## Β΄ ΜΕΡΟΣ

**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ**

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Γ΄ Τάξης

Γενικού Λυκείου
Θετική και Τεχνολογική
Κατεύθυνση

## ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
## Β΄ ΜΕΡΟΣ

**Ανδρεαδάκης Στυλιανός**
*Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών*
**Κατσαργύρης Βασίλειος**
*Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης*
**Μέτης Στέφανος**
*Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης*
**Μπρουχούτας Κων/νος**
*Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης*
**Παπασταυρίδης Σταύρος**
*Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών*
**Πολύζος Γεώργιος**
*Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης*

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

# ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΤΗ

Το τεύχος που κρατάς έχει μια ιδιομορφία: σου δίνεται με τη σύσταση *να μη το διαβάσεις·* τουλάχιστο με την έννοια που διαβάζεις ένα άλλο βιβλίο για να κατανοήσεις το περιεχόμενό του.

Πράγματι, οι ασκήσεις που σου δίνει ο καθηγητής σου είναι για να εργαστείς μόνος. Γιατί το να λύσεις μια άσκηση σημαίνει πολλές φορές όχι μόνο ότι έχεις κατανοήσει την αντίστοιχη θεωρητική ύλη αλλά και ότι ξέρεις να τη χρησιμοποιήσεις για να δημιουργείς, να ανακαλύπτεις ή να επιβεβαιώνεις κάτι καινούργιο. Και αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία για σένα τον ίδιο. Δεν μπορεί παρά να έχεις και συ τη φιλοδοξία να λύνεις μόνος χωρίς βοήθεια τις ασκήσεις για να νιώθεις τη χαρά αυτής της δημιουργίας, της ανακάλυψης.

Πρέπει να ξέρεις ότι όταν δυσκολεύεσαι στη λύση μιας άσκησης, τις πιο πολλές φορές υπάρχει κάποιο κενό στη γνώση της αντίστοιχης θεωρίας. Πήγαινε πίσω λοιπόν στο διδακτικό βιβλίο κάθε φορά που χρειάζεται να εντοπίσεις και να συμπληρώσεις τέτοια κενά. Οπωσδήποτε πριν καταπιαστείς με τη λύση των ασκήσεων πρέπει να αισθάνεσαι κάτοχος της θεωρίας που διδάχτηκες.

Εκτός από την κατανόηση της θεωρίας μπορεί να βοηθηθείς στη λύση μιας άσκησης από τα παραδείγματα και τις εφαρμογές που περιέχει το διδακτικό σου βιβλίο. Αν παρ' όλα αυτά δεν μπορείς να προχωρήσεις, στο τέλος του βιβλίου σου θα βρεις μια σύντομη υπόδειξη που ασφαλώς θα σε διευκολύνει.

Στις ελάχιστες περιπτώσεις που έχοντας εξαντλήσει κάθε περιθώριο προσπάθειας δε βρίσκεται η πορεία που οδηγεί στη λύση της άσκησης, τότε και *μόνο* τότε μπορείς να καταφύγεις σ' αυτό το τεύχος και μάλιστα για να διαβάσεις εκείνο το τμήμα της λύσης που σου είναι απαραίτητο για να συνεχίσεις μόνος.

Ουσιαστικά λοιπόν δεν το 'χεις ανάγκη αυτό το τεύχος. Σου παρέχεται όμως για τους εξής λόγους:

α) Για να μπορείς να συγκρίνεις τις λύσεις που εσύ βρήκες.

β) Για να σε προφυλάξει από ανεύθυνα «λυσάρια».

γ) Για να απαλλάξει τους γονείς σου από αντίστοιχη οικονομική επιβάρυνση.

δ) Για να έχεις εσύ και οι συμμαθητές σου την ίδια συλλογή ασκήσεων που είναι έτσι επιλεγμένες, ώστε να εξασφαλίζουν την εμπέδωση της ύλης.

ε) Για να εργάζεσαι χωρίς το άγχος να εξασφαλίσεις οπωσδήποτε για κάθε μάθημα τις λύσεις των ασκήσεων.

Το τεύχος που κρατάς είναι λοιπόν φίλος. Να του συμπεριφέρεσαι όπως σ' έναν φίλο που έχει δει πριν από σένα την ταινία που πρόκειται να δεις μη του επιτρέψεις να σου αποκαλύψει την «υπόθεση» πριν δεις και συ το έργο. Μετά μπορείτε, να συζητήσετε. Η σύγκριση των συμπερασμάτων θα είναι ενδιαφέρουσα και προπαντός επωφελής.

(Από το Τμήμα Μ.Ε. του Π.Ι.)

# Β΄ ΜΕΡΟΣ

# *ΑΝΑΛΥΣΗ*

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

### 1.1 και 1.2 — Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

**1.** i) Η συνάρτηση $f$ ορίζεται, όταν $x^2 - 3x + 2 \neq 0$.
Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει ρίζες: $x = 1$ ή $x = 2$.
Επομένως το πεδίο ορισμού της $f$ είναι το σύνολο $\boldsymbol{A} = \mathbb{R} - \{\mathbf{1,2}\}$.

ii) Η συνάρτηση $f$ ορίζεται, όταν $x - 1 \geq 0$ και $2 - x \geq 0$, δηλαδή όταν $x \geq 1$ και $x \leq 2$. Επομένως το πεδίο ορισμού της $f$ είναι το σύνολο $\boldsymbol{A} = [\mathbf{1,2}]$.

iii) Η συνάρτηση $f$ ορίζεται, όταν $1 - x^2 \geq 0$ και $x \neq 0$.
Η ανίσωση $1 - x^2 \geq 0$ αληθεύει, όταν $x^2 \leq 1$, δηλαδή όταν $-1 \leq x \leq 1$.
Επομένως το πεδίο ορισμού της $f$ είναι το σύνολο $\boldsymbol{A} = [\mathbf{-1, 0}) \cup (\mathbf{0,1}]$.

iv) Η συνάρτηση $f$ ορίζεται, όταν $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$. Άρα το πεδίο ορισμού της $f$ είναι το σύνολο $\boldsymbol{A} = (\ \infty, \mathbf{0})$.

**2.** i) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα των $x$ για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in (-\infty, \mathbf{1}) \text{ ή } \boldsymbol{x} \in (\mathbf{3}, +\infty)$$

ii) Ομοίως έχουμε:

$$\frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{-1} < \boldsymbol{x} < \mathbf{1}.$$

iii) Ομοίως είναι $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} > \mathbf{0}$.

**3.** i) Η γραφική παράσταση της $f$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της $g$ για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + 2x + 1 > x + 1 \Leftrightarrow x^3 + x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} > \mathbf{0}.$$

ii) Ομοίως:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + x - 2 > x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) > 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} > \mathbf{1}.$$

**4.** α) $A(45) = 2{,}89 \cdot 45 + 70{,}64 = 200{,}69$ cm

β) $\Gamma(45) = 2{,}75 \cdot 45 + 71{,}48 = 195{,}23$ cm.

**5.** Το τετράγωνο έχει περίμετρο $x$, οπότε η πλευρά του είναι $\dfrac{x}{4}$ και το εμβαδό του $\dfrac{x^2}{16}$.

Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει περίμετρο $20 - x$, οπότε η πλευρά του είναι $\dfrac{20-x}{3}$ και το εμβαδό του $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{20-x}{3}\right)^2$.

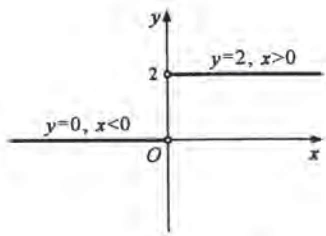
Επομένως $E$ = Ετετρ + Ετριγ = $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{\sqrt{3}}{36}(20-x)^2}$ με $x \in (0,20)$.

**6.** i) Είναι

$$f(x) = \frac{|x|}{x} + 1 = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}.$$

Η γραφική παράσταση της $f$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

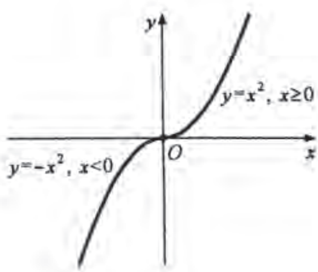
Το σύνολο των τιμών της $f$ είναι το $\boldsymbol{f(A) = \{0,2\}}$



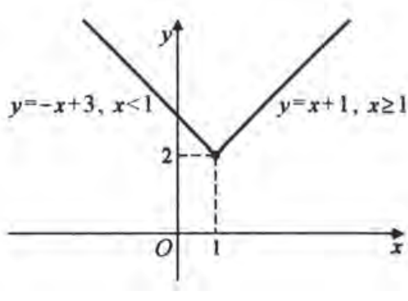

ii) Είναι

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Η γραφική παράσταση της $f$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σύνολο των τιμών της $f$ είναι το $\boldsymbol{f(A) = \mathbb{R}}$.

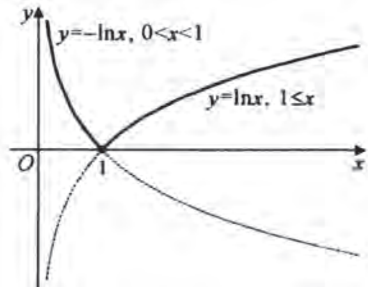



iii) Η γραφική παράσταση της $f$ δίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σύνολο των τιμών της $f$ είναι το $\boldsymbol{f(A) = [2, +\infty)}$.



iv) Είναι

$$f(x)=\begin{cases}-\ln x, & 0<x<1\\ \ln x, & 1\le x\end{cases}.$$




Η γραφική παράσταση της $f$ δίνεται στο διπλανό σχήμα.
Το σύνολο των τιμών της $f$ είναι το

$$\boldsymbol{f(A)=[0,+\infty)}.$$

**7.** i) Η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\mathbb{R}$, ενώ η $g$ το $B=[0,+\infty)$. Είναι $A\neq B$ και επομένως οι συναρτήσεις $f$ και $g$ δεν είναι ίσες.
Για κάθε $x\geq 0$ έχουμε

$$f(x)=\sqrt{x^2}=x=\left(\sqrt{x}\right)^2=g(x).$$

Άρα οι συναρτήσεις $f$, $g$ είναι ίσες στο διάστημα $[0,+\infty)$.

ii) Οι συναρτήσεις $f$, $g$ έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{|x|^2-1}{|x|^2+|x|}=\frac{\left(|x|-1\right)\left(|x|+1\right)}{|x|\left(|x|+1\right)}=\frac{|x|-1}{|x|}=g(x).$$

Επομένως $f=g$.

iii) Η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=[0,1)\cup(1,+\infty)$. Για κάθε $x\in A$, έχουμε

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=\sqrt{x}+1.$$

Η συνάρτηση $g$ έχει πεδίο ορισμού το $B=[0,+\infty)$. Επομένως οι συναρτήσεις $f$ και $g$ έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού, οπότε δεν είναι ίσες. Είναι όμως $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$. Άρα οι $f$, $g$ είναι ίσες στο $\mathbf{[0,1)\cup(1,+\infty)}$.

**8.** Η συνάρτηση $f$ ορίζεται στο $A=\mathbb{R}^*$, ενώ η $g$ στο $B=\mathbb{R}-\{1\}$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ έχουμε:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x+1}{x}+\frac{x}{1-x}=\frac{1-x^2+x^2}{x(1-x)}=\boldsymbol{\frac{1}{x(1-x)}}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x+1}{x}-\frac{x}{1-x}=\frac{1-x^2-x^2}{x(1-x)}=\boldsymbol{\frac{1-2x^2}{x(1-x)}}$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x}{1-x}=\frac{\mathbf{1+x}}{\mathbf{1-x}}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\dfrac{x+1}{x}}{\dfrac{x}{1-x}}=\frac{\mathbf{1-x^2}}{\mathbf{x^2}},$$

αφού για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ είναι $g(x)\neq 0$.

**9.** Οι δύο συναρτήσεις έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$, οπότε για κάθε $x\in A$ έχουμε:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\mathbf{2\sqrt{x}}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{x}}}$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=\mathbf{x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}},$$

ενώ, για κάθε $x\in A'$ με $g(x)\neq 0$, δηλαδή με $x\neq 1$ ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x-1}}.$$

**10.** i) Η $f$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f=\mathbb{R}$, ενώ η $g$ το $D_g=[0,+\infty)$. Για να ορίζεται η παράσταση $g(f(x))$ πρέπει

$$(x\in D_f \text{ και } f(x)\in D_g)\Leftrightarrow(x\in\mathbb{R}\text{ και } x^2\geq 0)\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}.$$

Επομένως, η $g\circ f$ ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και έχει τύπο:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=\sqrt{x^2}=|x|.$$

ii) Η $f$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f=\mathbb{R}$, ενώ η $g$ το $D_g=[-1,1]$.

Για να ορίζεται η παράσταση $g(f(x))$ πρέπει:

$$(x\in D_f \text{ και } f(x)\in D_g)\Leftrightarrow(x\in\mathbb{R}\text{ και } f(x)\in[-1,1])$$

$$\Leftrightarrow \text{ημ}x\in[-1,1]\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}.$$

Επομένως, η $g \circ f$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχει τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\eta\mu x) = \sqrt{1 - \eta\mu^2 x} = \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x} = |\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x}|$$

iii) Ομοίως η $f$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f = \mathbb{R}$ και η $g$ το

$$D_g = \mathbb{R} - \{x | x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\}.$$

Για να ορίζεται η παράσταση $g(f(x))$ πρέπει:

$$(x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ και } \frac{\pi}{4} \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η $g \circ f$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχει τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = \mathbf{1}.$$

**11.** Η $f$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R}$ και η $g$ το $D_g = [2, +\infty)$. Για να ορίζεται η παράσταση $g(f(x))$ πρέπει:

$$\begin{aligned}(x \in D_f \text{ και } (x^2+1) \in D_g) &\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ και } x^2 + 1 \geq 2)\\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0\\ &\Leftrightarrow x \geq 1 \text{ ή } x \leq -1\\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = A_1.\end{aligned}$$

Επομένως, η $g \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A_1$, και τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = \sqrt{\mathbf{x^2 - 1}}.$$

Για να ορίζεται η παράσταση $f(g(x))$ πρέπει

$$(x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f) \Leftrightarrow (x \geq 2 \text{ και } \sqrt{x-2} \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x \in [2, +\infty) = B_1.$$

Επομένως, η $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $B_1$ και τύπο

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x-2}\right) = \left(\sqrt{x-2}\right)^2 + 1 = x - 2 + 1 = \mathbf{x - 1}.$$

**12.** i) Η συνάρτηση $f(x) = ημ(x^2 + 1)$ είναι σύνθεση της $\boldsymbol{h(x) = x^2 + 1}$ με τη $\boldsymbol{g(x) = ημx}$.

ii) Η συνάρτηση $f(x) = 2ημ^2 3x + 1$ είναι σύνθεση των συναρτήσεων $\boldsymbol{h(x) = 3x}$, $\boldsymbol{g(x) = ημx}$ και $\boldsymbol{\varphi(x) = 2x^2 + 1}$.

iii) Η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$ είναι σύνθεση των συναρτήσεων $\boldsymbol{h(x) = 2x}$, $\boldsymbol{g(x) = e^x - 1}$ και $\boldsymbol{\varphi(x) = \ln x}$.

iv) Η συνάρτηση $f(x) = ημ^2 3x$ είναι σύνθεση των συναρτήσεων $\boldsymbol{h(x) = 3x}$, $\boldsymbol{g(x) = ημx}$ και $\boldsymbol{\varphi(x) = x^2}$.

## 1.1 και 2.2 — Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

**1.** i) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(1,0)$ και $B(0,1)$ έχει συντελεστή κατεύθυνσης $\lambda = \frac{1}{-1} = -1$, οπότε η εξίσωσή της είναι:

$$y - 0 = (-1)(x-1) \Leftrightarrow y = -x + 1.$$

Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(2,0)$ και $\Delta(1,1)$ έχει συντελεστή κατεύθυνσης $\lambda = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$, οπότε η εξίσωσή της είναι:

$$y - 0 = (-1)(x-2) \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

Επομένως το σχήμα μας είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \le x < 1 \\ -x+2, & 1 \le x < 2 \end{cases}}$$

ii) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(1,2)$ έχει $\lambda = 2$ και εξίσωση $y = 2x$.

Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,0)$ έχει $\lambda = \frac{-2}{1} = -2$ και εξίσωση $y - 0 = -2(x-2) \Leftrightarrow y = -2x + 4$.

Επομένως το σχήμα μας είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ -2x+4, & 1 < x \le 2 \end{cases}}$$

iii) Ομοίως έχουμε

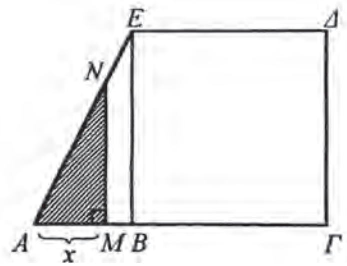
$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \cup [2,3) \\ 0, & x \in [1,2) \cup [3,4) \end{cases}}.$$

**2.** Το εμβαδόν των δύο βάσεων είναι $2\pi x^2$, ενώ το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι $2\pi x h$, όπου $h$ το ύψος του κυλίνδρου. Έχουμε $V = \pi x\, h = 628$, οπότε $h = \dfrac{628}{\pi x^2} \simeq \dfrac{200}{x^2}$ και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας γίνεται: $2\pi x \dfrac{200}{x^2} = \dfrac{400\pi}{x}$. Επομένως, το κόστος $K(x)$ είναι:

$$K(x) = 2\pi x^2 \cdot 4 + \frac{400\pi}{x} \cdot 1{,}25 = 8\pi x^2 + \frac{500\pi}{x} \quad \text{με } x > 0.$$

Το εμβαδόν των βάσεων του κουτιού είναι $\pi \cdot 5^2 \cdot 2 = 50\pi$, ενώ το κόστος τους είναι $50 \cdot \pi \cdot 4 = 200\pi$ (δραχμ.).
Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι $2\pi \cdot 5 \cdot 8 = 80\pi$, ενώ το κόστος της είναι $80\pi \cdot 1{,}25 = 100\pi$.
Επομένως το συνολικό κόστος είναι $300\pi \cong 942$ λεπτά $= 9{,}42$ ευρώ.

**3.** ● Αν $0 < x \leq 1$, τότε:
Τα τρίγωνα $AMN$ και $ABE$ είναι όμοια, οπότε




$$\frac{x}{(AB)} = \frac{(MN)}{(BE)} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{(MN)}{2}$$

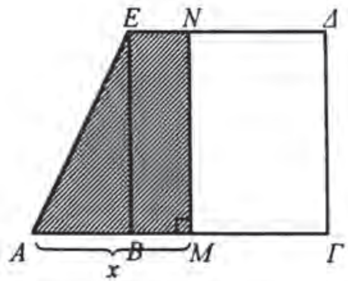
$$\Leftrightarrow (MN) = 2x.$$

Επομένως, το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = \frac{1}{2} x \cdot (MN) = \frac{1}{2} x \cdot 2x = x^2,$$

$$\text{με } 0 < x \leq 1.$$

● Αν $1 \leq x \leq 3$, τότε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι ίσο με




$$E(x) = \frac{1}{2} 1 \cdot 2 + (x-1)2$$

$$= 1 + 2x - 2 = 2x - 1, \text{ με } 1 < x \leq 3.$$

Άρα

$$\boldsymbol{E(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 2x - 1, & 1 < x \leq 3 \end{cases}}$$

**4.** Από τα όμοια τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΝΜ$, έχουμε:

$$\frac{ΒΓ}{MN} = \frac{ΑΔ}{ΑΕ} \Leftrightarrow \frac{10}{MN} = \frac{5}{5-x} \Leftrightarrow 2(5-x) = MN.$$

Επομένως,

$$E = E(x) = MN \cdot KN = 2(5-x)x = \mathbf{-2x^2 + 10x},\ 0 < x < 5 \text{ και}$$

$$P = P(x) = 2MN + 2KN = 2 \cdot 2(5-x) + 2 \cdot x = \mathbf{20 - 2x},\ 0 < x < 5.$$

**5.** i) ● Αν $x < -1$, τότε

$$f(x) = \frac{-x-1-x+1}{2} = -x$$

● Αν $-1 \le x < 1$, τότε

$$f(x) = \frac{x+1-x+1}{2} = 1$$

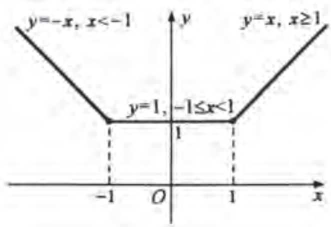
● Αν $1 \le x$, τότε

$$f(x) = \frac{x+1+x-1}{2} = x.$$

Άρα

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} -x, & x < -1 \\ 1, & -1 \le x < 1 \\ x, & x \ge 1 \end{cases}}.$$

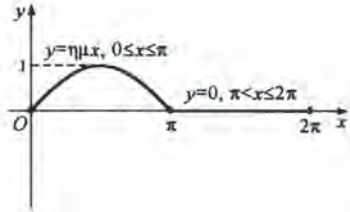
Η γραφική παράσταση της $f$ δίνεται στο διπλανό σχήμα.
Από τη γραφική παράσταση της $f$ φαίνεται ότι το σύνολο τιμών της $f$ είναι το σύνολο $\mathbf{[1, +\infty)}$.




ii) Έχουμε

$$f(x) = \begin{cases} \text{ημ}x, & x \in [0, \pi] \\ 0, & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}.$$

Η γραφική παράσταση της $f$ δίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σύνολο τιμών της $f$ είναι το $[0,1]$.



**6.** i) Έχουμε: $f(g(x)) = x^2 + 2x + 2$, δηλαδή $f(x+1) = x^2 + 2x + 2$. Αν θέσουμε $\omega = x + 1$ ή, ισοδύναμα, $x = \omega - 1$, τότε

$$f(\omega) = (\omega - 1)^2 + 2(\omega - 1) + 2 = \omega^2 - 2\omega + 1 + 2\omega - 2 + 2 = \omega^2 + 1.$$

Επομένως $\mathbf{f(x) = x^2 + 1}$.

ii) $f(g(x)) = \sqrt{1+x^2}$, δηλαδή $f(-x^2) = \sqrt{1+x^2}$. Θέτουμε $\omega = -x^2$, οπότε

$f(\omega) = \sqrt{1-\omega}$, $\omega \leq 0$. Επομένως μια από τις ζητούμενες συναρτήσεις είναι

η $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x \leq 0$.

iii) $g(f(x)) = |\text{συν}x| \Leftrightarrow \sqrt{1 - f^2(x)} = |\text{συν}x| \Leftrightarrow 1 - f^2(x) = \text{συν}^2 x$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = 1 - \text{συν}^2 x$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = \text{ημ}^2 x \Leftrightarrow |f(x)| = |\text{ημ}x|.$$

Μια τέτοια συνάρτηση είναι π.χ. η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = |\text{ημ}x|}$, ή η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = \text{ημ}x}$ ή η συνάρτηση $f(x) = -\text{ημ}x$ κ.τ.λ.

**7.** Οι συναρτήσεις $f$ και $g$ ορίζονται στο $\mathbb{R}$.

— Για να ορίζεται η παράσταση $f(g(x))$ πρέπει:

$$(x \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

— Επομένως ορίζεται η $(f \circ g)(x)$ και είναι

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\alpha x + 2) = \alpha x + 2 + 1 = \boldsymbol{\alpha x + 3}.$$

— Για να ορίζεται η παράσταση $g(f(x))$ πρέπει: $(x \in \mathbb{R}$ και $f(x) \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Επομένως ορίζεται η $(g \circ f)(x)$ και είναι

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = \alpha(x+1) + 2 = \boldsymbol{\alpha x + (\alpha + 2)}.$$

Θέλουμε να είναι $f \circ g = g \circ f$, που ισχύει μόνο όταν

$$(\alpha x + 3 = \alpha x + \alpha + 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \alpha + 2 = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 1}.$$

**8.** Η συνάρτηση $f$ ορίζεται στο $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$, ενώ η $g$ στο $D_g = [0, +\infty)$.

α) Για να ορίζεται η $f(f(x))$ θα πρέπει:

$$(x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_f) \Leftrightarrow \left(x \neq \alpha \text{ και } \frac{\alpha x + \beta}{x - \alpha} \neq \alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x \neq \alpha \text{ και } \beta \neq -\alpha^2\right) \Leftrightarrow x \in D_f.$$