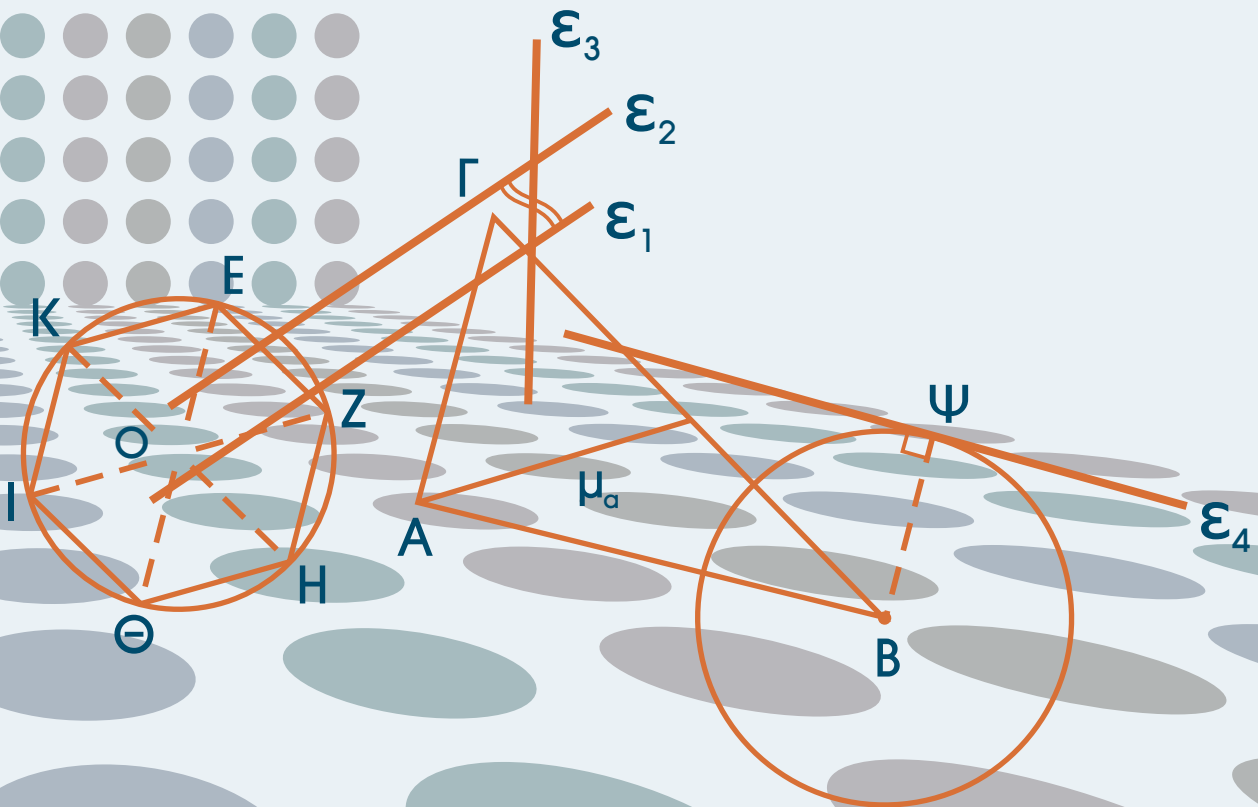


ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Τεύχος Α΄



Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Τεύχος Α΄

ΑΡΓΥΡΟΠΟΥΛΟΣ ΗΛΙΑΣ
ΒΛΑΜΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΚΑΤΣΟΥΛΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ
ΜΑΡΚΑΤΗΣ ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ
ΣΙΔΕΡΗΣ ΠΟΛΥΧΡΟΝΗΣ

ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΕΡΓΟΥ:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΟΜΑΔΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

*Αργυρόπουλος Ηλίας Διδάκτωρ Μαθηματικών
Ε.Μ.Πολυτεχνείου, Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης*

*Βήλαμος Παναγιώτης Διδάκτωρ Μαθηματικών
Ε.Μ.Πολυτεχνείου*

Κατσούλης Γεώργιος Μαθηματικός

*Μαρκάτης Στυλιανός Επίκουρος Καθηγητής Τομέα
Μαθηματικών Ε.Μ.Πολυτεχνείου*

*Σίδερης Πολυχρόνης Μαθηματικός,
τ. Σχολικός Σύμβουλος*

ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

*Βανδουλάκης Ιωάννης Διδάκτωρ Πανεπιστημίου
Μ. Λομποσον Μόσχας Ιόνιο Πανεπιστήμιο*

ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Δημητρίου Ελένη

ΕΠΙΛΟΓΗ ΕΙΚΟΝΩΝ

Παπαδοπούλου Μπία

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ ΣΕΛΙΔΟΠΟΙΗΣΗ

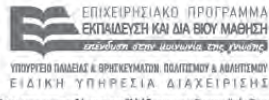
Αλεξοπούλου Καίτη

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
συνδότηση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
Πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η «Ευκλείδεια Γεωμετρία» έχει ένα διττό ρόλο να εκπληρώσει: να μνηθεί ο μαθητής στη συλλογιστική την οποία εκφράζει το αξεπέραστο λογικό-επαγωγικό σύστημα του Ευκλείδη και να ανταποκριθεί στις σύγχρονες εκπαιδευτικές επιταγές.

Το βιβλίο αυτό, σύμφωνα με τα πλαίσια συγγραφής που έθεσε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ευελπιστεί ότι θα οδηγήσει τους μαθητές του Λυκείου να γνωρίσουν την αυστηρή αλλά και λιτή μαθηματική γλώσσα, ελπίζοντας ότι θα συνεισφέρει στη μαθηματική παιδεία του τόπου, αναπτύσσοντας το ρεαλισμό της μαθηματικής λογικής και σκέψης.

Το έργο αυτό είναι αποτέλεσμα της συλλογικής προσπάθειας μιας ομάδας μαθηματικών, οι οποίοι αποδεχόμενοι την πρόσκληση του Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας εργάστηκαν συστηματικά για την πραγματοποίησή του.

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε θερμά: το Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας για τη βοήθεια που μας πρόσφερε σε όλη τη διάρκεια της συγγραφής του έργου, τον Καθηγητή του Ε.Μ.Πολυτεχνείου κ. Ευγένιο Αγγελόπουλο για τις σημαντικές του παρατηρήσεις στη διαμόρφωση του βιβλίου και τα μέλη της επιτροπής κρίσης που με τις εύστοχες παρατηρήσεις τους βοήθησαν στην τελική μορφή αυτού του έργου.

Οι συγγραφείς

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία	9
1.1	Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.....	10
1.2	Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας.....	12
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα	15
2.1	Σημεία, γραμμές και επιφάνειες	16
2.2	Το επίπεδο.....	16
2.3	Η ευθεία.....	17
2.4	Η ημιευθεία	17
2.5	Το ευθύγραμμο τμήμα	17
2.6	Μετατοπίσεις στο επίπεδο	18
2.7	Σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων	18
2.8	Πράξεις μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων	19
2.9	Μήκος ευθύγραμμου τμήματος - Απόσταση δύο σημείων.....	20
2.10	Σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο.....	20
2.11	Ημιεπίπεδα	21
2.12	Η γωνία.....	22
2.13	Σύγκριση γωνιών	22
2.14	Ευθεία κάθετη από σημείο σε ευθεία	24
2.15	Πράξεις μεταξύ γωνιών.....	25
2.16	Απλές σχέσεις γωνιών.....	25
2.17	Έννοια και στοιχεία του κύκλου.....	28
2.18	Επίκεντρα γωνία - Σχέση επίκεντρης γωνίας και τόξου	30
2.19	Μέτρο τόξου και γωνίας	33
2.20	Τεθλασμένη γραμμή - Πολύγωνο - Στοιχεία πολυγώνου.....	35
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	Τρίγωνα	39
3.1	Στοιχεία και είδη τριγώνων	40
3.2	1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων	41
3.3	2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων	44
3.4	3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων	44
3.5	Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου	49
3.6	Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων.....	49
3.7	Κύκλος - Μεσοκάθετος - Διχοτόμος	55
3.8	Κεντρική συμμετρία.....	56
3.9	Αξονική συμμετρία.....	57
3.10	Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας	59

3.11	Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών.....	60
3.12	Τριγωνική ανισότητα.....	60
3.13	Κάθετες και πλάγιες.....	64
3.14	Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου.....	66
3.15	Εφαπτόμενα τμήματα.....	68
3.16	Σχετικές θέσεις δυο κύκλων.....	69
3.17	Απλές γεωμετρικές κατασκευές.....	73
3.18	Βασικές κατασκευές τριγώνων.....	75

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 **Παράλληλες ευθείες** **79**

4.1	Εισαγωγή.....	80
4.2	Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα.....	80
4.3	Κατασκευή παράλληλης ευθείας.....	83
4.4	Γωνίες με πλευρές παράλληλες.....	84
4.5	Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου.....	85
4.6	Άθροισμα γωνιών τριγώνου.....	88
4.7	Γωνίες με πλευρές κάθετες.....	89
4.8	Άθροισμα γωνιών κυρτού n -γώνου.....	90

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 **Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία** **101**

5.1	Εισαγωγή.....	102
5.2	Παραλληλόγραμμα.....	102
5.3	Ορθογώνιο.....	105
5.4	Ρόμβος.....	106
5.5	Τετράγωνο.....	107
5.6	Εφαρμογές στα τρίγωνα.....	109
5.7	Βαρύκεντρο τριγώνου.....	112
5.8	Το ορθόκεντρο τριγώνου.....	113
5.9	Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου.....	114
5.10	Τραπεζίο.....	117
5.11	Ισοσκελές τραπέζιο.....	118
5.12	Αξιοσημείωτες ευθείες και κύκλοι τριγώνου.....	121

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 **Εγγεγραμμένα σχήματα** **127**

6.1	Εισαγωγικά - Ορισμοί.....	128
6.2	Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης.....	128
6.3	Γωνία χορδής και εφαπτομένης.....	129
6.4	Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στον κύκλο Τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία.....	131
6.5	Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο.....	135
6.6	Το εγγράψιμο τετράπλευρο.....	136
6.7	Γεωμετρικοί τόποι και γεωμετρικές κατασκευές με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων.....	140

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 Αναλογίες **147**

7.1	Εισαγωγή.....	148
7.2	Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε n ίσα μέρη	148
7.3	Γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος με αριθμό - Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων	148
7.4	Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα - Αναλογίες	150
7.5	Μήκος ευθύγραμμου τμήματος.....	151
7.6	Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο	151
7.7	Θεώρημα του Θαλή	154
7.8	Θεωρήματα των διχοτόμων τριγώνου.....	160
7.9	Απολλώνιος Κύκλος.....	163

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 Ομοιότητα **171**

8.1	Όμοια ευθύγραμμα σχήματα.....	172
8.2	Κριτήρια ομοιότητας.....	173

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 Μετρικές σχέσεις **183**

9.1	Ορθές προβολές	184
9.2	Το Πυθαγόρειο θεώρημα.....	184
9.3	Γεωμετρικές κατασκευές.....	188
9.4	Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος.....	190
9.5	Θεωρήματα Διαμέσων	196
9.6	Βασικοί γεωμετρικοί τόποι	197
9.7	Τέμνουσες κύκλου	200

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 Εμβαδά **209**

10.1	Πολυγωνικά χωρία	210
10.2	Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος - Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα.....	210
10.3	Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων.....	211
10.4	Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου	217
10.5	Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων - πολυγώνων.....	220
10.6	Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμό του.....	224

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11 Μέτρηση κύκλου **229**

11.1	Ορισμός κανονικού πολυγώνου	230
11.2	Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων	230
11.3	Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους	235
11.4	Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα	240
11.5	Μήκος τόξου	241
11.6	Προσέγγιση του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα.....	243
11.7	Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος	243
11.8	Τετραγωνισμός κύκλου.....	246

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12 Ευθείες και επίπεδα στο χώρο **255**

12.1	Εισαγωγή.....	256
12.2	Η έννοια του επιπέδου και ο καθορισμός του.....	257
12.3	Σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων.....	259
12.4	Ευθείες και επίπεδα παράλληλα - Θεώρημα του Θαλή.....	263
12.5	Γωνία δύο ευθειών - Ορθογώνιες ευθείες.....	267
12.6	Απόσταση σημείου από επίπεδο - Απόσταση δυο παράλληλων επιπέδων.....	272
12.7	Διέδρη γωνία - Αντίστοιχη επίπεδη μιας διέδρης - Κάθετα επίπεδα.....	275
12.8	Προβολή σημείου και ευθείας σε επίπεδο - Γωνία ευθείας και επιπέδου.....	280

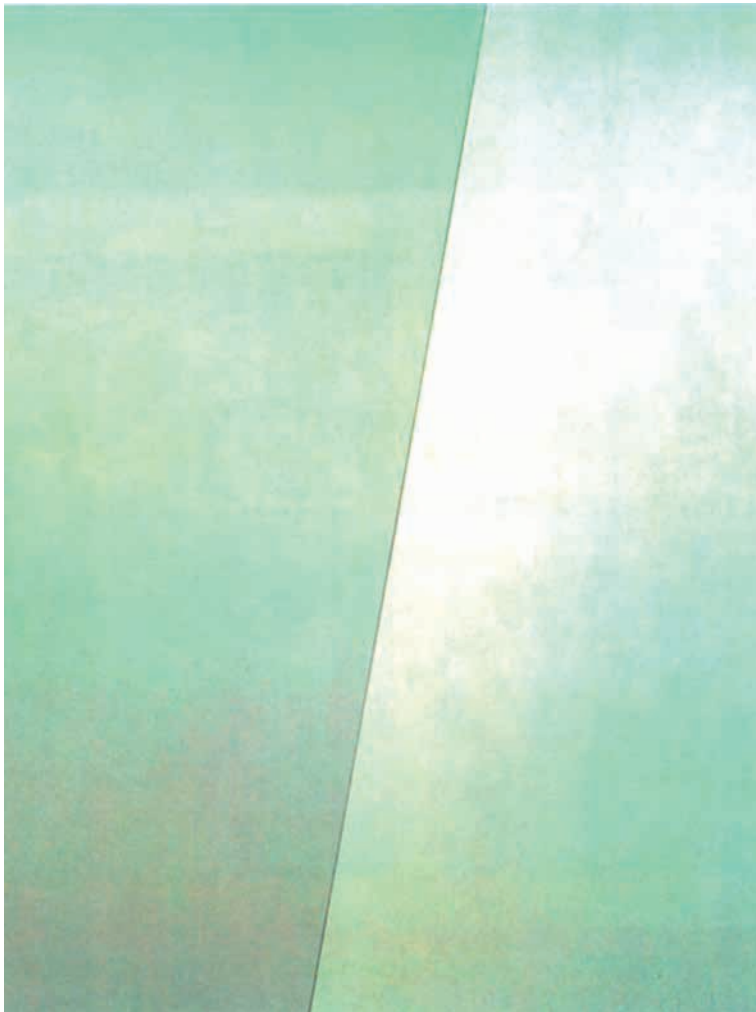
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13 Στερεά σχήματα **285**

13.1	Περί πολυέδρων.....	286
13.2	Ορισμός και στοιχεία του πρίσματος.....	288
13.3	Παραλληλεπίπεδο - κύβος.....	289
13.4	Μέτρηση πρίσματος.....	290
13.5	Ορισμός και στοιχεία πυραμίδας.....	296
13.6	Κανονική πυραμίδα - Τετράεδρο.....	298
13.7	Μέτρηση πυραμίδας.....	298
13.8	Ορισμός και στοιχεία κόλπουρης πυραμίδας.....	301
13.9	Μέτρηση κόλπουρης ισοσκελούς πυραμίδας.....	301
13.10	Στερεά εκ περιστροφής.....	304
13.11	Ορισμός και στοιχεία κυλίνδρου.....	304
13.12	Μέτρηση κυλίνδρου.....	305
13.13	Ορισμός και στοιχεία κώνου.....	307
13.14	Μέτρηση του κώνου.....	307
13.15	Κόλπουρος κώνος.....	309
13.16	Ορισμός και στοιχεία σφαίρας.....	311
13.17	Θέσεις ευθείας και επιπέδου ως προς σφαίρα.....	312
13.18	Μέτρηση σφαίρας.....	313
13.19	Κανονικά πολυέδρα.....	318

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄.....	323
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β΄.....	329
ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ.....	332
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ.....	349
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΝΟΜΑΤΩΝ.....	352
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	355

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ



*Ellsworth Kelly (Αμερικανός, 1923).
«Γκρι πανό 2»
2 πανό, λάδια σε καμβά, 1974.*

1.1 Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η μελέτη του **χώρου** και των **σχημάτων**, επίπεδων και στερεών, που μπορούν να υπάρξουν μέσα σε αυτόν. Μέσα στο χώρο βρίσκεται ο φυσικός κόσμος, στον οποίο ζούμε, και όλα τα αντικείμενα, μεγάλα ή μικρά, έμψυχα ή άψυχα.

Στο χώρο διακρίνουμε τις **επιφάνειες**, τις **γραμμές** και τα **σημεία**. Οι επιφάνειες έχουν δύο διαστάσεις, οι γραμμές μία, τα σημεία καμία. Οι επιφάνειες διαχωρίζουν τα αντικείμενα μεταξύ τους ή από το περιβάλλον. Πάνω σε μια επιφάνεια μπορούμε να θεωρήσουμε γραμμές, οι οποίες μάλιστα μπορεί να την οριοθετούν. Εδώ χρειάζεται μια διευκρίνιση. Στην καθημερινή γλώσσα μιλάμε για «γραμμές» της ασφάλτου ή για σιδηροδρομικές «γραμμές», επειδή το πλάτος στη μία περίπτωση, το πλάτος και το ύψος στην άλλη είναι αμελητέα ως προς το μήκος. Γενικά, όλα τα υλικά αντικείμενα εκτείνονται σε τρεις διαστάσεις. Στην καθημερινή γλώσσα δεχόμαστε τις προσεγγίσεις, στη Γεωμετρία όχι. Λειτουργούμε αναγκαστικά με αφηρημένες έννοιες, που τις αποκαλούμε **όρους** της Γεωμετρίας.

Η Γεωμετρία ήταν ο πρώτος κλάδος της ανθρώπινης γνώσης που διαμορφώθηκε ως επιστήμη και επί αιώνες ο μόνος. Το αντικείμενό της, ο χώρος και τα σχήματα, είναι και προσιτό και πλούσιο, πρόσφορο για θεωρητική μελέτη αλλά και για πρακτικές εφαρμογές. Από την εποχή του Αρχιμήδη και του Ήρωνα μέχρι σήμερα, τα πεδία εφαρμογής της Γεωμετρίας συνεχώς διευρύνονται. Για τα σπίτια που ζούμε, τα καράβια που ταξιδεύουμε ή τις επεξεργασμένες εικόνες της τηλεόρασης είναι αναγκαία η χρήση της Γεωμετρίας, άμεση ή έμμεση.

Αρχικά, η μελέτη των ιδιοτήτων των διάφορων γεωμετρικών σχημάτων έγινε με τρόπο εμπειρικό, όπως τη συναντήσαμε στο Γυμνάσιο. Η μέθοδος που ακολουθήσαμε τότε ήταν η εύρεση ή επαλήθευση των ιδιοτήτων και σχέσεων ανάμεσα στα γεωμετρικά σχήματα με βάση τη μέτρηση, για την οποία χρησιμοποιούσαμε το διαβαθμισμένο κανόνα (υποδεκάμετρο) και το μοιρογνωμόνιο. Η μέτρηση όμως δεν μπορεί να είναι ακριβής και τα αποτελέσματά της δε γενικεύονται.

Η διαφοροποίηση της Πρακτικής Γεωμετρίας από τη Θεωρητική ή Ευκλείδεια Γεωμετρία, την οποία θα μελετήσουμε στο Λύκειο, συνίσταται στη συστηματική χρήση της λογικής για να θεμελιώσει τις γνώσεις μας για το χώρο, ξεφεύγοντας από μετρήσεις και επιμέρους συμπεράσματα. Οι γνώσεις αυτές υπάρχουν ήδη: όλοι ξέρουν τι είναι κύκλος και τι τετράγωνο – οι αντίστοιχες λέξεις υπάρχουν σε όλες τις γνωστές γλώσσες. Πρόκειται όμως για γνώσεις σκόρπιες, ασύνδετες μεταξύ τους. Η Γεωμετρία τις θεμελιώνει, δηλαδή τις οργανώνει σε ένα σύστημα, και φυσικά προσθέτει και νέες γνώσεις σε αυτές που ήδη υπάρχουν. Κάθε

καινούργιο αποτέλεσμα προκύπτει από τα προηγούμενα, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που λέγεται **απόδειξη** και που στηρίζεται στους κανόνες της Λογικής.

Πώς προχωράει αυτή η διαδικασία; Ας δούμε λίγο το τετράγωνο. Το τετράγωνο, όσο απλό και αν φαίνεται, είναι σύνθετη έννοια. Έχει ίσες πλευρές και μάλιστα ανά δύο παράλληλες, ίσες γωνίες και μάλιστα όλες ορθές. Πρέπει, επομένως, πρώτα να ξεκαθαρίσουμε τι σημαίνει ισότητα και ανισότητα (πλευρών ή γωνιών), τι παραλληλία και τι ορθή γωνία (ή καθετότητα). Μόνο μετά από αυτά μπορούμε να μιλήσουμε για τετράγωνο, αφού πρώτα δώσουμε τον ορισμό του. **Η Γεωμετρία προχωράει από το πιο απλό στο πιο σύνθετο.**

Θα πρέπει, ωστόσο, από κάπου να ξεκινήσουμε, από έννοιες οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας, όπως οι έννοιες **σημείο**, **ευθεία** και **επίπεδο** τις οποίες δεχόμαστε ως πρωταρχικές χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις. Όμως οι έννοιες αυτές υπόκεινται στις παρακάτω παραδοχές:

- Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
- Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτή.
- Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.

Ισχυρισμούς όπως οι παραπάνω, που τους δεχόμαστε ως αληθείς χωρίς απόδειξη, τους ονομάζουμε **αξιώματα**. Επομένως, τα αξιώματα δεν αποδεικνύονται, επιλέγονται. Για την Ευκλείδεια Γεωμετρία έχουν προταθεί πάρα πολλά αξιωματικά συστήματα, δηλαδή διαφορετικές επιλογές αξιωμάτων (βλ. Παράρτημα Α). Η δομή του βιβλίου, η σειρά των αποτελεσμάτων εξαρτώνται από την επιλογή των αξιωμάτων, τα οποία δίνονται εκεί που χρειάζονται. Γενικότερα, γίνεται προσπάθεια ώστε, μετά από μία νέα έννοια ή ένα νέο σημαντικό αποτέλεσμα, να εξετάζεται τι καινούργιο μπορεί να προκύψει σε συνδυασμό με τα προηγούμενα. Κάθε νέο αποτέλεσμα που προκύπτει από μία σειρά συλλογισμών θεμελιωμένα στα αξιώματα λέγεται **θεώρημα**, ενώ οι άμεσες συνέπειες ενός θεωρήματος λέγονται **πορίσματα**.

Όπως προαναφέραμε αντικείμενο της Γεωμετρίας είναι η μελέτη των σχημάτων του επιπέδου και του χώρου. Η μελέτη αυτή συχνά υποβοηθείται από ένα σχέδιο του σχήματος.

Στην πορεία εξαγωγής των συμπερασμάτων σημαντικό ρόλο παίζει η διαίσθηση και η εποπτεία. Τα συμπεράσματα, για να είναι γενικά, δεν πρέπει να είναι συνέπειες μόνο της παρατήρησης του σχεδίου. Είναι αναγκαίο να προκύπτουν με ορθό συλλογισμό από τις ιδιότητες του σχήματος, οι οποίες άλλωστε είναι δυνατό να μην είναι όλες ορατές στο

σχήμα. Για να καταλήξουμε σε μία απόδειξη ο δρόμος μπορεί να είναι μακρύς και να περνάει μέσα από εικασίες, λάθη, επανατοποθετήσεις, μέχρι να οδηγηθούμε στην τελική μορφή.

Είναι λοιπόν φανερό ότι οι συλλογισμοί μας, για την αντιμετώπιση ενός γεωμετρικού προβλήματος, πρέπει να είναι θεωρητικοί, γενικοί και το σχέδιο του σχήματος να έρχεται αργώς στην προσπάθεια ανακάλυψης εκείνων των ιδιοτήτων που θα μας οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ερμηνεύει τις μορφές του περιβάλλοντος χώρου χρησιμοποιώντας λίγες πρώτες αρχές και αξιοποιώντας τη σκέψη και τον ορθό λόγο.

1.2 Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας

Η γένεση των πρώτων εννοιών της Γεωμετρίας είναι μια διαδικασία που κράτησε πολλούς αιώνες. Η διαμόρφωσή τους ήταν αποτέλεσμα νοητικής αφαίρεσης όλων των άλλων ιδιοτήτων και σχέσεων των αντικειμένων του κόσμου που μας περιβάλλει, εκτός από τις ιδιότητες της αμοιβαίας θέσης και του μεγέθους. Οι ιδιότητες αυτές εκφράζονται με την ιδέα ότι δύο αντικείμενα είναι «κοντά» ή ότι «άπτονται» το ένα του άλλου, τη σχέση τους όταν το ένα είναι «μέρος» του άλλου ή όταν ένα αντικείμενο βρίσκεται «μεταξύ» δύο άλλων ή το ένα «μέσα» στο άλλο, και την ιδέα της σύγκρισης δύο αντικειμένων, της εξακρίβωσης ότι το ένα είναι «μεγαλύτερο», «μικρότερο» ή «ίσο» με ένα άλλο. Στη διαμόρφωση των γεωμετρικών εννοιών, αποφασιστικής σημασίας πρέπει να ήταν η προσπάθεια απεικόνισης των γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων με ζωγραφικές παραστάσεις, που λειτουργούσαν ως μοντέλα των πραγματικών αντικειμένων. Η διαδικασία αυτή όμως δεν μπορεί να χρονολογηθεί ιστορικά.

Οι πρώτες γραπτές μαρτυρίες γεωμετρικών γνώσεων ανάγονται στην τρίτη με δεύτερη χιλιετία π.Χ. και προέρχονται από τους λαούς της αρχαίας Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας. Αν και οι μαρτυρίες αυτές δεν είναι πλούσιες, ωστόσο μπορούμε να σχηματίσουμε μια ιδέα για το χαρακτήρα της Γεωμετρίας στους πολιτισμούς αυτούς. Οι γεωμετρικές γνώσεις των λαών αυτών συνίστανται, κατά κύριο λόγο, στον υπολογισμό επιφανειών και όγκων ακολουθώντας μια «αλγοριθμική» διαδικασία, έναν κανόνα, ο οποίος εφαρμόζεται για συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές. Με μικρές εξαιρέσεις, τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται είναι εμπειρικής προέλευσης και η λύση που δίνεται δε συνιστά λογική απόδειξη, αν και σε μεμονωμένες περιπτώσεις προβλημάτων αναπτύσσονται μέθοδοι γεωμετρικών μετασχηματισμών, οι οποίες μπορούν να θεωρη-

θούν ως ένα είδος αποδεικτικής διαδικασίας. Αυτή η μορφή Γεωμετρίας διήρκεσε πολλούς αιώνες χωρίς να σημειωθεί αισθητή πρόοδος.

Μία νέα περίοδος εγκαινιάζεται στην αρχαία Ελλάδα, όπου η Γεωμετρία μετασχηματίζεται σε αφηρημένη αποδεικτική επιστήμη. Εμφανίζεται η έννοια της λογικής απόδειξης που λειτουργεί ως μέθοδος επιβεβαίωσης της αλήθειας μιας γεωμετρικής πρότασης, αλλά και ως στοιχείο που συστηματοποιεί τις γεωμετρικές γνώσεις. Έτσι εμφανίζονται οι πρώτες συστηματικές γεωμετρικές πραγματείες, όπως του Ιπποκράτη του Χίου περί το 440 π.Χ., και τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, που αποτέλεσαν το επιστέγασμα της αρχαίας Ελληνικής μαθηματικής παράδοσης, αλλά και πρότυπο επιστημονικού ιδεώδους για πολλούς αιώνες. Από μελέτη της θέσης, του μεγέθους και της μορφής των γεωμετρικών σχημάτων για άμεσες πρακτικές εφαρμογές η Γεωμετρία μεταμορφώνεται σε επιστήμη που μελετά αφηρημένα νοητικά αντικείμενα, οι σχέσεις των οποίων αποδεικνύονται με τη βοήθεια μιας λογικής ακολουθίας προτάσεων, ξεκινώντας από ορισμένες υποθέσεις που λαμβάνονται χωρίς απόδειξη.

Την Ελληνιστική ακόμα περίοδο αναπτύσσονται θεμελιακά νέες μέθοδοι υπολογισμού επιφανειών και όγκων (π.χ. η μέθοδος της εξάντλησης στα έργα του Αρχιμήδη), που στηρίζονται σε αφηρημένες θεωρητικές προσεγγίσεις και βαθιές μαθηματικές θεωρίες. Επίσης, εμφανίζονται αφηρημένες θεωρίες για νέα γεωμετρικά αντικείμενα, η δυνατότητα εφαρμογής των οποίων θα διευκρινιστεί πολλούς αιώνες μετά, όπως π.χ. η θεωρία των κωνικών τομών του Απολλωνίου, που θα βρει εφαρμογή στη Φυσική μόλις το 17ο αιώνα. Την ίδια περίπου εποχή φαίνεται ότι άρχισαν και οι έρευνες στα θεμέλια της Γεωμετρίας με τις προσπάθειες απόδειξης του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη (των παραλλήλων), οι οποίες συνεχίστηκαν από πολλούς μαθηματικούς του Αραβικού κόσμου.

Η Ευρωπαϊκή Αναγέννηση οδήγησε σε νέα άνθηση της Γεωμετρίας. Ένα νέο βήμα πραγματοποιείται με την εισαγωγή της μεθόδου των συντεταγμένων από τον Ντεκάρτ το πρώτο μισό του 17ου αι. Ο νέος μετασχηματισμός της Γεωμετρίας συνίσταται στη σύνθεση της αναπτυσσόμενης τότε Άλγεβρας με την Ανάλυση που βρισκόταν στο στάδιο της γένεσής της και τη δημιουργία της Αναλυτικής Γεωμετρίας, η οποία μελετά τα γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια των μεθόδων της Άλγεβρας.

Η εφαρμογή των νέων μεθόδων του διαφορικού λογισμού στην Αναλυτική Γεωμετρία οδήγησε στον πολλαπλασιασμό των κλάδων της Γεωμετρίας. Το 18ο αι. διαμορφώνεται η Διαφορική Γεωμετρία στα έργα του Ουλερ και του Μονζ, αντικείμενο της οποίας αρχικά γίνονται οποιεσδήποτε λείες καμπύλες και επιφάνειες και οι μετασχηματισμοί τους. Στα μέσα του 17ου αι. αναπτύσσεται και η Προβολική Γεωμετρία στις μελέτες του Ντεζάργκ και του Πασκάλ πάνω στην απεικόνιση σωμάτων στο επίπεδο. Το αντικείμενο του νέου κλάδου επικεντρώνεται από τον

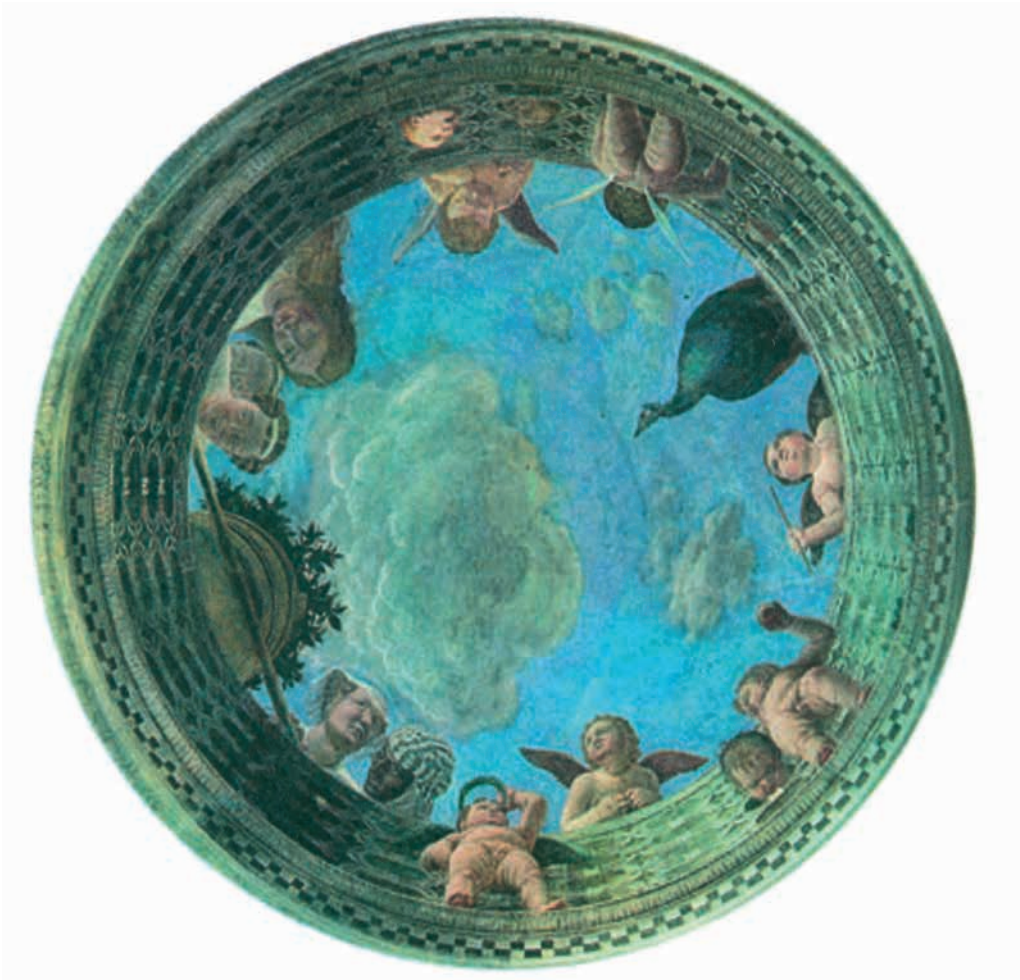
Πονσελέ (1822) στη μελέτη των ιδιοτήτων των επίπεδων σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες κατά την προβολή τους από ένα επίπεδο σε άλλο, ενώ η καθαυτό θεωρία της γεωμετρικής απεικόνισης (σε συνδυασμό με τα προβλήματα σχεδίασης) οδήγησε στο σύστημα της Παραστατικής Γεωμετρίας του Μονζ.

Σε όλους τους παραπάνω κλάδους οι θεμελιακές έννοιες και αξιώματα παρέμεναν σχεδόν τα ίδια από την εποχή της αρχαίας Ελλάδας. Άλλαζε το πεδίο των γεωμετρικών αντικειμένων που μελετόνταν και οι μέθοδοι που εφαρμόζονταν. Ριζική ανατροπή της εικόνας αυτής παρουσιάζεται στις αρχές του 19ου αι. με την ανακάλυψη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τον Ν. Λομπατσέφσκι (1829) και τον Γ. Μπόλναι (1832). Ο Λομπατσέφσκι, ξεκινώντας από την άρνηση του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη, κατασκεύασε ένα λογικά άψογο σύστημα Γεωμετρίας, παρά το γεγονός ότι οι ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων στο σύστημα που περιέγραφε βρίσκονταν σε κατάφωρη αντίθεση με τη συνήθη εποπτική αντίληψη του χώρου.

Η νέα περίοδος που εγκαινιάζεται με τον Λομπατσέφσκι χαρακτηρίζεται από την ανάπτυξη νέων γεωμετρικών θεωριών (νέων «Γεωμετριών»), την αλλαγή του αντικείμενου της Γεωμετρίας (αντικείμενο της Γεωμετρίας γίνονται τώρα «χώροι» διάφορων ειδών) και το διαχωρισμό της έννοιας του «μαθηματικού» από την έννοια του «πραγματικού» χώρου. Η νέα έννοια του γενικευμένου μαθηματικού χώρου διατυπώνεται σαφώς από τον Ρήμαν το 1854 και ανοίγει νέες προοπτικές στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας οδηγώντας στη δημιουργία της λεγόμενης Ρη-μάνειας Γεωμετρίας, η οποία βρίσκει εφαρμογή στη θεωρία της σχετικότητας. Με τη δύση του 19ου αι. τα θεμέλια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά και των άλλων (μη Ευκλείδειων) «Γεω-μετριών» αποσαφηνίζονται και εκτίθενται με τη μορφή συστήματος αξιωμάτων.

ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η εμπέδωση και η συστηματική μελέτη των πρωταρχικών εννοιών: σημείο, ευθεία, επίπεδο καθώς και των βασικών γεωμετρικών σχημάτων: ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, κύκλος, επίπεδο ευθύγραμμο σχήμα. Όπως είδαμε, οι πρωταρχικές έννοιες σημείο, ευθεία, επίπεδο δίνονται χωρίς ορισμό και με βάση αυτές ορίζονται τα βασικά γεωμετρικά σχήματα, τα οποία θα μελετήσουμε στη συνέχεια.



*Andrea Mantegna (Ιταλός, περίπου 1431 - 1506).
Οροφή από την "Camera degli Sposi" (Δωμάτιο των Συζύγων),
τοιχογραφία από το Δουκικό Παλάτι, στη Μάντοβα της Ιταλίας.*