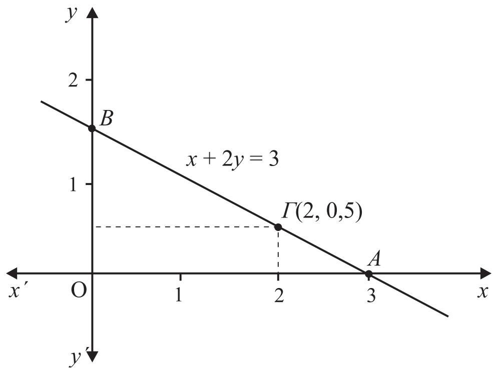
ΕΝΟΤΗΤΑ 6
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Μαθηματικές Προτάσεις
Πλοηγηθείτε: http://www.youtube.com/watch?v = MtmJ3BArAgA
Διαβάστε: Λ. Κάρολ, *Η Αλίκη στη Χώρα των Θαυμάτων*,
Εκδόσεις Πατάκη
Δείτε: *Alice in Wonderland (1951)*, Clyde Geronimi

Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$ με δύο αγνώστους ονομάζεται **γραμμική εξίσωση**.

Κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που επαληθεύει τη γραμμική εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ ονομάζεται **λύση** της εξίσωσης.

Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$ παριστάνει μια **ευθεία**.



Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, και αντίστροφα, αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή.

- Η ευθεία $y=\kappa$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,\kappa)$.
- Η ευθεία $x=\kappa$ είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$

στο σημείο $(\kappa, 0)$. Δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης, καθώς στο ίδιο x αντιστοιχούν άπειρα y.

- Ο άξονας $x'x$ έχει εξίσωση $y = 0$.
- Ο άξονας $y'y$ έχει εξίσωση $x = 0$.

Ένα **σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους** ή **ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους πρώτου βαθμού** αποτελείται από δύο εξισώσεις της μορφής:

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \text{ και } \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2.$$

Ένα τέτοιο σύστημα συμβολίζεται ως εξής:

$$(\Sigma)\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

Αναζητούμε όλα τα ζεύγη (x, y) που επαληθεύουν συγχρόνως και τις δύο εξισώσεις, δηλαδή αναζητούμε την κοινή λύση τους, αν υπάρχει.
Όταν δεν υπάρχει ζεύγος (x, y) τέτοιο ώστε να επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος, τότε λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

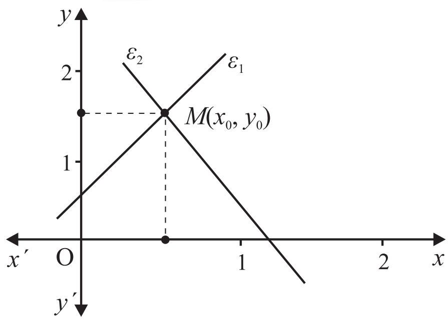
Για τη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος της μορφής $(\Sigma)\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Τα σφάλματα κατά τη σχεδίαση δε βοηθούν στον ακριβή προσδιορισμό των λύσεων ενός συστήματος γραφικά.

- Σχεδιάζουμε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τις ευθείες:

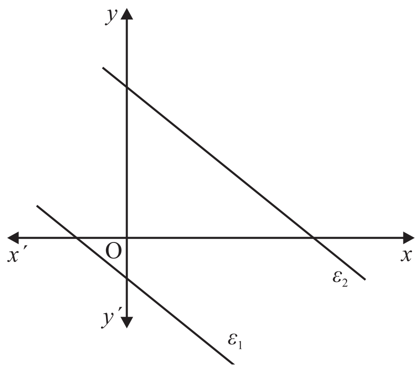
$$(\varepsilon_1): \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \text{ και}$$
$$(\varepsilon_2): \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2.$$

- Αν οι ευθείες **τέμνονται** σε ένα σημείο $M(x_o, y_o)$, οι συντεταγμένες του σημείου αυτού θα επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις, διότι το ση-

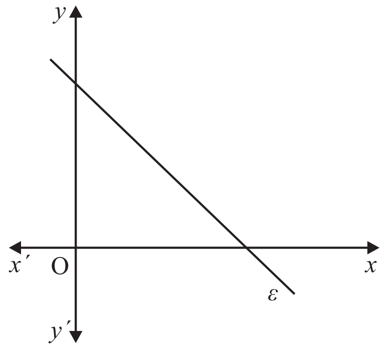


μείο αυτό είναι κοινό και των δύο ευθειών. Επομένως το ζεύγος των συντεταγμένων του σημείου αυτού αποτελεί τη **μοναδική λύση** του συστήματος, δηλαδή $(x, y) = (x_o, y_o)$.

- Αν οι ευθείες είναι **παράλληλες**, δηλαδή δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, τότε το σύστημα δεν έχει λύση, δηλαδή λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**.



- Αν οι δύο ευθείες **ταυτίζονται**, τότε έχουν άπειρα κοινά σημεία, οι συντεταγμένες των οποίων επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις του συστήματος. Τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και λέγεται **αόριστο**.



ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΥΟ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Κάθε αλγεβρική μέθοδος για την επίλυση ενός συστήματος είναι μια διαδικασία κατά την οποία το σύστημα μετατρέπεται σε ένα άλλο σύστημα, που έχει ακριβώς την ίδια λύση, δηλαδή σε **ισοδύναμο** σύστημα. Στο τέλος της διαδικασίας καταλήγουμε στη λύση του αρχικού συστήματος. Για να λύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Απαλείφουμε τους παρονομαστές.

- Εκτελούμε τις πράξεις σύμφωνα με την προτεραιότητα των πράξεων.
- Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους, μεταφέροντας τους άγνωστους όρους στο πρώτο μέλος και τους γνωστούς στο δεύτερο μέλος κάθε εξίσωσης.
- Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων, φροντίζοντας οι ίδιοι άγνωστοι να βρίσκονται ο ένας κάτω από τον άλλον σε κάθε εξίσωση.
- Λύνουμε το σύστημα ακολουθώντας μια αλγεβρική μέθοδο επίλυσης.

Η μέθοδος των αντίθετων συντελεστών

Για να λύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη κάθε εξίσωσης του συστήματος με τον κατάλληλο αριθμό, ώστε να δημιουργηθούν αντίθετοι συντελεστές σε έναν από τους δύο αγνώστους, για να οδηγηθούμε στην απαλοιφή του.
- Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει μια εξίσωση με έναν μόνο άγνωστο.
- Επιλύουμε την εξίσωση και έτσι βρίσκουμε την τιμή του ενός από τους δύο αγνώστους.
- Επιλέγουμε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος και αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε. Έτσι, βρίσκουμε την τιμή και του άλλου αγνώστου.
- Καταγράφουμε τη λύση του συστήματος.

Η μέθοδος της αντικατάστασης

Για να λύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με τη μέθοδο της αντικατάστασης, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Επιλύουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο. Ο άγνωστος τον οποίο προτιμάμε είναι αυτός που έχει τον μικρότερο συντελεστή.
- Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα και δημιουργούμε εξίσωση με έναν άγνωστο.

- Επιλύουμε την εξίσωση και υπολογίζουμε την τιμή του αγνώστου.
- Αντικαθιστώντας την τιμή του αγνώστου στην αρχική εξίσωση, υπολογίζουμε και τον άλλο άγνωστο.
- Καταγράφουμε τη λύση του συστήματος.

Η μέθοδος της σύγκρισης

Για να λύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με τη μέθοδο της σύγκρισης, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Λύνουμε και τις δύο εξισώσεις του συστήματος ως προς τον ίδιο άγνωστο.
- Εφόσον τα πρώτα μέλη των εξισώσεων που δημιουργήσαμε είναι ίσα, μπορούμε να εξισώσουμε τα δεύτερα μέλη έτσι ώστε να δημιουργηθεί μια εξίσωση με έναν μόνο άγνωστο.
- Επιλύουμε την εξίσωση και υπολογίζουμε την τιμή του αγνώστου.
- Κρατάμε μία από τις δύο εξισώσεις που δημιουργήσαμε στο πρώτο βήμα και αντικαθιστούμε σε αυτήν την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε. Έτσι, υπολογίζουμε την τιμή του άλλου αγνώστου.
- Καταγράφουμε τη λύση του συστήματος.

Συστήματα μη γραμμικών εξισώσεων

Ένα σύστημα στο οποίο η μία από τις δύο εξισώσεις έχει άγνωστο υψωμένο σε μια δύναμη ή υπάρχει γινόμενο ή πηλίκο μεταξύ των αγνώστων, ενώ η άλλη εξίσωση είναι γραμμική, ονομάζεται **σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων**.

> Για την επίλυση ενός τέτοιου συστήματος χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Λυμένα Παραδείγματα

Παράδειγμα 6.1

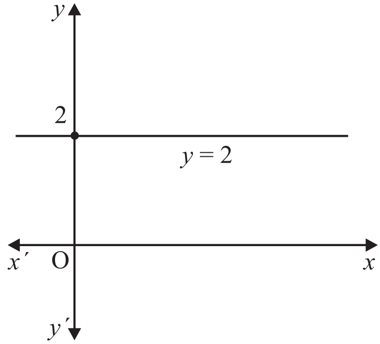
Να βρεθεί η τιμή του λ και να σχεδιάσετε την αντίστοιχη ευθεία σε κάθε περίπτωση, ώστε η ευθεία $(2\lambda-1)x+(7-\lambda)y=13$ να είναι:

α. παράλληλη στον άξονα $x'x$,

β. παράλληλη στον άξονα $y'y$.

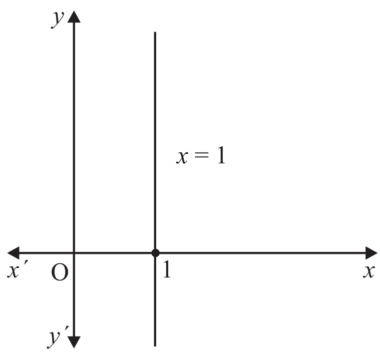
Λύση

α. Για να είναι η ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$, πρέπει $2\lambda-1=0$ ή $\lambda=\frac{1}{2}$. Για αυτή την τιμή του λ η εξίσωση της ευθείας γίνεται $\left(7-\frac{1}{2}\right)y=13$ ή $\frac{13}{2}y=13$ ή $y=2$.



β. Για να είναι η ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$, πρέπει $7-\lambda=0$ ή $\lambda=7$. Για αυτή την τιμή του λ η εξίσωση της ευθείας γίνεται:

$(2\cdot 7-1)x=13$ ή $13x=13$ ή $x=1$.



Παράδειγμα 6.2

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 3x-6y=3 \\ x-2y=-4 \end{cases}$ και με τις τρεις μεθόδους.

Λύση

Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών	**Μέθοδος της αντικατάστασης**	**Μέθοδος της σύγκρισης**
$\begin{cases} 3x-6y=3 \\ x-2y=-4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 3x-6y=3 \\ x-2y=-4 \end{cases} \times(-3)$ ή $+\begin{cases} 3x-6y=3 \\ -3x+6y=12 \end{cases}$ $3x-3x-6y+6y=3+12$ ή $0x+0y=15$ ή $0=15$. Το σύστημα είναι αδύνατο.	$\begin{cases} 3x-6y=3 \\ x-2y=-4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 3x-6y=3 \\ x=2y-4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 3(2y-4)-6y=3 \\ x=2y-4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 6y-12-6y=3 \\ x=2y-4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 0y=12+3 \\ x=2y-4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 0y=15 \\ x=2y-4. \end{cases}$ Το σύστημα είναι αδύνατο.	$\begin{cases} 3x-6y=3 \\ x-2y=-4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 3x=6y+3 \\ x=2y+4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x=\dfrac{6y+3}{3} \\ x=2y+4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x=2y+1 \\ x=2y+4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x=2y+1 \\ 2y+1=2y+4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x=2y+1 \\ 1=4. \end{cases}$ Το σύστημα είναι αδύνατο.

Παράδειγμα 6.3

Να βρεθούν οι τιμές των α και β αν το σύστημα $\begin{cases} (\alpha+5)x+y=-5 \\ \alpha x+(\beta-2)y=0 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=(-1,1)$.

Λύση

Το ζεύγος $(x,y)=(-1,1)$ θα επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος, καθώς είναι λύση του:

$$\begin{cases}(\alpha+5)\cdot(-1)+1=-5\\ \alpha\cdot(-1)+(\beta-2)\cdot 1=0\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}-\alpha-5+1=-5\\ -\alpha+\beta-2=0\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}-\alpha=-1\\ -\alpha+\beta=2\end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases}\alpha=1\\ -1+\beta=2\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}\alpha=1\\ \beta=3\end{cases}$$

Επομένως για $(\alpha,\beta)=(1,3)$ το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=(-1,1)$.

Παράδειγμα 6.4

Να βρεθούν οι τιμές των α και β αν το σύστημα $\begin{cases}7x+2y=20\\ (\alpha-2)x+(\beta-1)y=40\end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις.

Λύση

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

$$\begin{cases}7x+2y=20\\ (\alpha-2)x+(\beta-1)y=40\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}7x+2y=20 & \times(+2)\\ (\alpha-2)x+(\beta-1)y=40 & \times(-1)\end{cases} \text{ ή }$$

$$+\begin{cases}14x+4y=40\\ -(\alpha-2)x-(\beta-1)y=-40\end{cases}$$

$$14x+(2-\alpha)x+4y-(\beta-1)y=0 \text{ ή } (14+2-\alpha)x+(4-\beta+1)y=0 \text{ ή }$$

$$(16-\alpha)x+(5-\beta)y=0.$$

Εφόσον το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, πρέπει $16-\alpha=0$ και $5-\beta=0$, επομένως $\alpha=16$ και $\beta=5$.

Παράδειγμα 6.5

Δίνονται τα συστήματα:

$$(\Sigma_1)\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{y-x}{3}=\dfrac{7}{6}\\ \dfrac{x+y}{5}-\dfrac{y-x}{3}=\dfrac{14}{15}\end{cases} \text{ και } (\Sigma_2)\begin{cases}(\alpha-5)x+(\alpha+\beta+10)y=17\\ \alpha x+7-\beta y-11=-2\alpha x-6\beta x\end{cases}$$

Να βρεθούν οι τιμές των α και β, αν τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα.

Λύση

Εφόσον τα συστήματα είναι ισοδύναμα, λύνουμε το πρώτο και αντικαθιστούμε τις τιμές των x και y στο δεύτερο:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{y-x}{3}=\dfrac{7}{6} & \Big|\times(+6) \\ \dfrac{x+y}{5}-\dfrac{y-x}{3}=\dfrac{14}{15} & \Big|\times(+15) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3(x+y)+2(y-x)=7 \\ 3(x+y)-5(y-x)=14 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} 3x+3y+2x-2y=7 \\ 3x+3y-5x+5y=14 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 5x+y=7 & \Big|\times(-8) \\ -2x+8y=14 & \Big| \end{cases} \text{ ή}$$

$$+\begin{cases} -40x-8y=-56 \\ -2x+8y=14 \end{cases} \text{ ή } x=1 \text{ και } y=2.$$
$$\overline{\quad -42x=-42 \quad}$$

Για $x=1$ και $y=2$ έχουμε:

$$\begin{cases} (\alpha-5)\cdot 1+(\alpha+\beta+10)\cdot 2=17 \\ \alpha\cdot 1+7-\beta\cdot 2-11=-2\alpha\cdot 1-6\beta\cdot 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha-5+2\alpha+2\beta+20=17 \\ \alpha+7-2\beta-11+2\alpha+6\beta=0 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} 3\alpha+2\beta=2 & \Big|\times(-1) \\ 3\alpha+4\beta=4 & \Big| \end{cases} \text{ ή } +\begin{cases} -3\alpha-2\beta=-2 \\ 3\alpha+4\beta=4 \end{cases} \text{ ή } \beta=1 \text{ και } \alpha=0.$$
$$\overline{\quad 2\beta=2 \quad}$$

Παράδειγμα 6.6

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=0 \\ 2x+y=-xy \end{cases}$

Λύση

Πρέπει $x\neq 0$ και $y\neq 0$. Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών στην πρώτη εξίσωση έχουμε:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=0 \\ 2x+y=-xy \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=0 & \Big|\times(xy) \\ 2x+y=-xy & \Big| \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} xy\cdot\dfrac{1}{x}+xy\cdot\dfrac{4}{y}=0 \\ 2x+y=-xy \end{cases} \text{ ή}$$

$\begin{cases} y+4x=0 \\ 2x+y+xy=0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=-4x \\ 2x+y+xy=0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=-4x \\ 2x-4x+x\cdot(-4x)=0 \end{cases}$ ή

$\begin{cases} y=-4x \\ 2x-4x-4x^2=0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=-4x \\ -4x^2-2x=0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=-4x \\ -2x(x+1)=0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=-4x \\ x=0 \text{ ή } x=-1 \end{cases}$

Το $x=0$ απορρίπτεται.

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x,y)=(-1,4)$.

Παράδειγμα 6.7

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \frac{3}{2}(x-2)+(y-1)=2 \\ x^2-y=-6 \end{cases}$

Λύση

Το σύστημα θα λυθεί με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Έχουμε:

$\begin{cases} \frac{3}{2}(x-2)+(y-1)=2 \\ x^2-y=-6 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 2\cdot\frac{3}{2}(x-2)+2(y-1)=2\cdot 2 \\ x^2-y=-6 \end{cases}$ ή

$\begin{cases} 3(x-2)+2(y-1)=4 \\ x^2-y=-6 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 3x-6+2y-2=4 \\ x^2-y=-6 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 2y=4+8-3x \\ x^2-y=-6 \end{cases}$ ή

$\begin{cases} y=6-\frac{3}{2}x \\ x^2-y=-6 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=6-\frac{3}{2}x \\ x^2-6+\frac{3}{2}x=-6 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=6-\frac{3}{2}x \\ x^2+\frac{3}{2}x=0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=6-\frac{3}{2}x \\ x\left(x+\frac{3}{2}\right)=0 \end{cases}$ ή

$\begin{cases} y=6-\frac{3}{2}x \\ x=0 \text{ ή } x=-\frac{3}{2} \end{cases}$

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη $(x,y)=(0,6)$ και $(x,y)=\left(-\frac{3}{2},\frac{33}{4}\right)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΤΥΠΟΥ

Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

1. Η εξίσωση $y=-2$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$.
2. Η ευθεία $5x+3y=8$ διέρχεται από το σημείο $(-1,1)$.
3. Το σύστημα $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ 2\alpha x+2\beta y=2\gamma \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις.
4. Αν δύο ευθείες είναι κάθετες, τότε το σύστημα των εξισώσεών τους είναι αόριστο.
5. Οι ευθείες $\varepsilon_1: 6x-2y=24$ και $\varepsilon_2: 2x+3y=19$ τέμνονται στο σημείο $(5,3)$.
6. Όταν ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων είναι αδύνατο, οι ευθείες που το αποτελούν είναι παράλληλες.
7. Αν για το σύστημα $\begin{cases} 3x-6y=3 \\ x-2y=-4 \end{cases}$ εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, τότε προκύπτει η εξίσωση $6x=12$.
8. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(3,3)$ και $B(6,2)$ είναι $y=-\frac{1}{3}x+4$.
9. Αν για δύο αριθμούς γνωρίζουμε ότι έχουν άθροισμα 15, ενώ το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 117, τότε βρίσκουμε ότι αυτοί οι αριθμοί είναι ο αριθμός 9 και ο αριθμός 6.
10. Οι πραγματικοί αριθμοί α και β, ώστε η εξίσωση $\alpha x^2+(\alpha+4)x+2\beta-4=0$ να έχει ρίζες τους αριθμούς –2 και –3, είναι ίσοι με 1 και 6 αντίστοιχα.

14ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα 1ο

Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases}(x+y)\cdot(2x-y+5)=0\\ x-y=2\end{cases}$$

Θέμα 2ο

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x+2y=5$, $\varepsilon_2 : 3x-y=1$ και $\varepsilon_3 : \left(\lambda^2-7\lambda+1\right)x+3\lambda y=1$, οι οποίες διέρχονται από το ίδιο σημείο. Εφόσον βρείτε το σημείο τομής των τριών ευθειών, να βρείτε τις τιμές του λ.

Θέμα 3ο

Κατά τη διάρκεια των φιλικών παιχνιδιών, οι Αετοί κέρδισαν το 45% των αγώνων μπάσκετ. Κατά τη διάρκεια της κανονικής περιόδου του πρωταθλήματος, οι Αετοί κέρδισαν 6 ακόμα αγώνες και έχασαν 2 αγώνες, ενώ τελειώνοντας τη σεζόν είχαν κερδίσει τους μισούς από τους αγώνες. Σε πόσους αγώνες έπαιξαν συνολικά οι Αετοί;

(*American Mathematics Contest, 2007*)

Θέμα 4ο

Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που διέρχεται από τα σημεία $A(0,3)$ και $B(1,0)$ και έχει κορυφή το σημείο $K(-1,2)$.

15ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα 1ο

Ένας ζωολογικός κήπος έχει ένα πλήθος από δίποδα πουλιά και ένα πλήθος από τετράποδα θηλαστικά. Σε μια επίσκεψη στον ζωολογικό κήπο, η Μαργαρίτα μέτρησε 200 κεφάλια και 522 πόδια. Πόσα από τα ζώα που μέτρησε η Μαργαρίτα ήταν δίποδα πουλιά;

(*American Mathematics Contest, 2012*)

Θέμα 2ο

Να βρεθούν οι τιμές των αριθμών α και β ώστε η εξίσωση

$\left(\alpha-\sqrt{7}\beta\right)x=2\alpha+\sqrt{7}\beta-3\sqrt{7}$ να είναι αόριστη.

Θέμα 3ο

Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=14 \\ \dfrac{2y+5x}{xy}=55 \end{cases}$$

Θέμα 4ο

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^3=\frac{z}{y}-\frac{2y}{z}(1),\ \ y^3=\frac{x}{z}-\frac{2z}{x}(2),\ \ z^3=\frac{y}{x}-\frac{2x}{y}(3).$$

(*ΕΜΕ, 2014*)