ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ανισώσεις

23 Ανισώσεις 1ου βαθμού

Θεωρία

Επίλυση των ανισώσεων $αx + β > 0$ και $αx + β < 0$

1. Για να λύσουμε τις ανισώσεις $αx + β > 0$ και $αx + β < 0$, ενεργούμε όπως και στην εξίσωση $αx + β = 0$, λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη ότι, όταν διαιρούμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με έναν (μη μηδενικό) αριθμό α, τότε η φορά της ανισότητας:

- μένει η ίδια, αν $α > 0$
- αλλάζει, αν $α < 0$

Έχουμε, π.χ.:

$αx + β > 0 \Leftrightarrow αx > -β$, οπότε:

- Αν $α > 0$, τότε $αx + β > 0 \Leftrightarrow αx > -β \Leftrightarrow x > -\dfrac{β}{α}$.
- Αν $α < 0$, τότε $αx + β > 0 \Leftrightarrow αx > -β \Leftrightarrow x < -\dfrac{β}{α}$.
- Αν $α = 0$, τότε $αx + β > 0 \Leftrightarrow 0x > -β$.
  - Αν $-β \geq 0$ (δηλαδή αν $β \leq 0$), είναι αδύνατη.
  - Αν $-β < 0$ (δηλαδή αν $β > 0$), αληθεύει για κάθε τιμή του x.

Λυμένες ασκήσεις

2. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{x-2}{2} - \dfrac{2x-1}{4} > \dfrac{x-1}{6} - \dfrac{1}{4}$ **(1).**

Λύση

Η (1), ισοδύναμα, γράφεται:

$$12 \cdot \frac{x-2}{2} - 12 \cdot \frac{2x-1}{4} > 12 \cdot \frac{x-1}{6} - 12 \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 6(x-2)-3(2x-1) > 2(x-1)-3 \Leftrightarrow 6x-12-6x+3 > 2x-2-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x > -2-3+12-3 \Leftrightarrow -2x > 4 \Leftrightarrow x < \dfrac{4}{-2} \Leftrightarrow x < -2.$

3. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{1}{6} > x - \dfrac{3}{2}$ **(1):**

i) στο $\mathbb{R}$ ii) στο $\mathbb{N}$ iii) στο $\mathbb{Z}$

Λύση

Η (1), ισοδύναμα, γράφεται:

$(1) \Leftrightarrow 6 \cdot \dfrac{2x-1}{3} - 6 \cdot \dfrac{1}{6} > 6 \cdot x - 6 \cdot \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2(2x-1)-1 > 6x-9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x-2-1 > 6x-9 \Leftrightarrow 4x-6x > -9+2+1 \Leftrightarrow -2x > -6 \Leftrightarrow x < \dfrac{-6}{-2} \Leftrightarrow x < 3.$

i) Στο $\mathbb{R}$, όπως είδαμε: $(1) \Leftrightarrow x < 3$.

ii) Στο $\mathbb{N}$: $(1) \Leftrightarrow x < 3 \Leftrightarrow (x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = 2)$.

iii) Στο $\mathbb{Z}$: $(1) \Leftrightarrow (x = 2$ ή $x = 1$ ή $x = 0$ ή $x = -1$ ή $x = -2 \ldots)$.

4. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{2x-4}{10} - \dfrac{x-5}{15} < \dfrac{2x-10}{15}$ **(1).**

Λύση

Η (1), ισοδύναμα, γράφεται:

$30 \cdot \dfrac{2x-4}{10} - 30 \cdot \dfrac{x-5}{15} < 30 \cdot \dfrac{2x-10}{15} \Leftrightarrow 3(2x-4)-2(x-5) < 2(2x-10) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x-12-2x+10 < 4x-20 \Leftrightarrow 6x-2x-4x < -20+12-10 \Leftrightarrow 0x < -18$

και είναι αδύνατη.

5. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{x-3}{2} - \dfrac{2x-3}{5} < \dfrac{x-1}{10} - \dfrac{2}{5}$**.**

Λύση

Η ανίσωση (1), ισοδύναμα, γράφεται:

$(1) \Leftrightarrow 10 \cdot \dfrac{x-3}{2} - 10 \cdot \dfrac{2x-3}{5} < 10 \cdot \dfrac{x-1}{10} - 10 \cdot \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5(x-3)-2(2x-3) < x-1-2 \cdot 2 \Leftrightarrow 5x-15-4x+6 < x-1-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x-4x-x < -1-4+15-6 \Leftrightarrow 0x < 4$

και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό.

6. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση 3x + 10 έχει τιμή:
i) το πολύ 25 ii) τουλάχιστον 16 iii) όχι μικρότερη από 28
iv) όχι μεγαλύτερη από 4 v) που υπερβαίνει το 7
vi) που δεν υπερβαίνει το 1 vii) μεταξύ των −2 και 10

Λύση

i) $3x + 10 \le 25 \Leftrightarrow 3x \le 25 - 10 \Leftrightarrow 3x \le 15 \Leftrightarrow x \le 5$

ii) $3x + 10 \ge 16 \Leftrightarrow 3x \ge 16 - 10 \Leftrightarrow 3x \ge 6 \Leftrightarrow x \ge 2$

iii) $3x + 10 \ge 28 \Leftrightarrow 3x \ge 28 - 10 \Leftrightarrow 3x \ge 18 \Leftrightarrow x \ge 6$

iv) $3x + 10 \le 4 \Leftrightarrow 3x \le 4 - 10 \Leftrightarrow 3x \le -6 \Leftrightarrow x \le -2$

v) $3x + 10 > 7 \Leftrightarrow 3x > 7 - 10 \Leftrightarrow 3x > -3 \Leftrightarrow x > -1$

vi) $3x + 10 \le 1 \Leftrightarrow 3x \le 1 - 10 \Leftrightarrow 3x \le -9 \Leftrightarrow x \le -3$

vii) $-2 < 3x + 10 < 10 \Leftrightarrow -2 - 10 < 3x < 10 - 10 \Leftrightarrow -12 < 3x < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 0$

7. Αν $x = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, και $x \in [0, 2\pi)$, να βρείτε τον x.

Λύση

Θα βρούμε πρώτα το κ. Λύνουμε τη (διπλή) ανίσωση $x \in [0, 2\pi)$ ως προς κ και έχουμε:

$$x \in [0, 2\pi) \Leftrightarrow 0 \le x < 2\pi \Leftrightarrow 0 \le 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \le 2\kappa\pi < 2\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \le 2\kappa\pi < \frac{7\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le 2\kappa < \frac{7}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \le \kappa < \frac{7}{6}.$$

Όμως $\kappa \in \mathbb{Z}$, άρα $\kappa = 1$ και έτσι $x = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{3} \overset{\kappa = 1}{=\!=} 2 \cdot 1 \cdot \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$.

Τελικά λοιπόν $x = \dfrac{5\pi}{3}$.

Πίνακας προσήμων της παράστασης αx + β

8. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του x, το πρόσημο των τιμών της παράστασης:
i) 5x − 10 ii) −3x + 12

Λύση

Σχόλιο Το πρόσημο της παράστασης $\alpha x + \beta$ (με $\alpha \neq 0$) φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$\alpha x+\beta$		ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α	

$\left(x_0 = -\dfrac{\beta}{\alpha} \text{ είναι η ρίζα του } \alpha x + \beta\right)$

i) Η παράσταση $5x - 10$ έχει τη μορφή $\alpha x + \beta$ με $\alpha = 5 > 0$ και ρίζα $x_0 = 2$ [αφού $5x - 10 = 0 \Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = 2$].
Έτσι, το πρόσημό της φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$5x-10$		$-$	0	$+$	

ii) Η παράσταση $-3x + 12$ έχει τη μορφή $\alpha x + \beta$ με $\alpha = -3 < 0$ και ρίζα $x_0 = 4$
$\left[\text{αφού } -3x + 12 = 0 \Leftrightarrow -3x = -12 \Leftrightarrow x = \dfrac{-12}{-3} \Leftrightarrow x = 4\right]$.
Έτσι, το πρόσημό της φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-3x+12$		$+$	0	$-$	

Συναλήθευση ανισώσεων (επίλυση συστήματος ανισώσεων)

9. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν (αληθεύουν όλες) οι ανισώσεις:

i) $6x - 1 < 2x + 5$ **και** $2 - x \leq 2x + \dfrac{1}{4}$

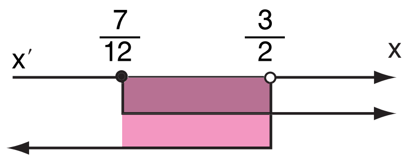
ii) $\dfrac{x}{2} + 1 > \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{2}$ **και** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{x}{6} - 1$

Λύση

i) Για να βρούμε τις κοινές τους λύσεις, λύνουμε πρώτα κάθε ανίσωση χωριστά. Έτσι, έχουμε:

- $6x - 1 < 2x + 5 \Leftrightarrow 4x < 6 \Leftrightarrow x < \dfrac{3}{2}$ και
- $2 - x \leq 2x + \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow -3x \leq -\dfrac{7}{4} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{7}{12}$.

Στη συνέχεια παριστάνουμε τις λύσεις τους πάνω στον ίδιο άξονα. Έτσι παρατηρούμε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν μόνο αν $\frac{7}{12} \leq x < \frac{3}{2}$.



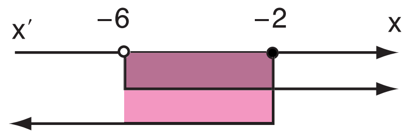
ii) Έχουμε:

- $\frac{x}{2} + 1 > \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 2x + 4 > x - 2 \Leftrightarrow x > -6.$

- $6 \cdot \frac{x}{2} - 6 \cdot \frac{1}{3} \leq 6 \cdot \frac{x}{6} - 6 \cdot 1 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 3x - 2 \leq x - 6 \Leftrightarrow 2x \leq -4 \Leftrightarrow x \leq -2.$



- Οι ανισώσεις συναληθεύουν αν και μόνο αν $-6 < x \leq -2$.

«Διπλή» ανίσωση

10. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει $-x < 2x - 6 < x + 2$.

Λύση

$-x < 2x - 6 < x + 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x < 2x - 6 \quad (1) \\ \text{και} \\ 2x - 6 < x + 2 \quad (2) \end{cases}$$

- $(1) \Leftrightarrow -x - 2x < -6 \Leftrightarrow -3x < -6 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x > \frac{-6}{-3} \Leftrightarrow x > 2.$

- $(2) \Leftrightarrow 2x - x < 2 + 6 \Leftrightarrow x < 8.$

Επομένως: $-x < 2x - 6 < x + 2 \Leftrightarrow 2 < x < 8.$

Λύνουμε **ξεχωριστά** καθεμία από τις ανισώσεις:
$-x < 2x - 6$ και
$2x - 6 < x + 2$
και μετά **συναληθεύουμε**.

Επίλυση παραμετρικής ανίσωσης

11. Να λύσετε ως προς x την ανίσωση $\lambda(x - \lambda) > x - 1$ (1).

Λύση

[Αρχικά, φέρνουμε την ανίσωση στη μορφή $Ax \gtrless B$.]

Η (1), ισοδύναμα, γράφεται:

(1) $\Leftrightarrow \lambda(x-\lambda) > x-1 \Leftrightarrow \lambda x - \lambda^2 > x - 1 \Leftrightarrow \lambda x - x > \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\lambda-1)x > (\lambda-1)(\lambda+1)$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda - 1 > 0$, δηλαδή $\lambda > 1$, τότε (1) $\Leftrightarrow x > \lambda + 1$.
- Αν $\lambda - 1 < 0$, δηλαδή $\lambda < 1$, τότε (1) $\Leftrightarrow x < \lambda + 1$.
- Αν $\lambda - 1 = 0$, δηλαδή $\lambda = 1$, τότε (1) $\Leftrightarrow 0x > 0$, που είναι αδύνατη.

12. Να λύσετε ως προς x την ανίσωση $\lambda x + 3 \le \mu - 4x$.

Λύση

[Φέρνουμε πρώτα την ανίσωση στη μορφή $Ax \le B$ ή $Ax \ge B$.]
Η ανίσωση, ισοδύναμα, γράφεται:
$\lambda x + 3 \le \mu - 4x \Leftrightarrow \lambda x + 4x \le \mu - 3 \Leftrightarrow (\lambda+4)x \le \mu - 3$ (1).
[Διακρίνουμε περιπτώσεις για το λ, ανάλογα με το αν ο συντελεστής του x είναι θετικός, αρνητικός ή μηδέν.]

- Αν $\lambda + 4 > 0$, δηλαδή $\lambda > -4$, τότε (1) $\Leftrightarrow x \le \dfrac{\mu-3}{\lambda+4}$.
- Αν $\lambda + 4 < 0$, δηλαδή $\lambda < -4$, τότε (1) $\Leftrightarrow x \ge \dfrac{\mu-3}{\lambda+4}$.
- Αν $\lambda + 4 = 0$, δηλαδή $\lambda = -4$, τότε (1) $\Leftrightarrow 0x \le \mu - 3$, οπότε:
  - Αν [$\lambda = -4$ και] $\mu - 3 \ge 0$, δηλαδή $\mu \ge 3$, τότε η (1) αληθεύει για κάθε x.
  - Αν [$\lambda = -4$ και] $\mu - 3 < 0$, δηλαδή $\mu < 3$, τότε η (1) είναι αδύνατη.

Εύρεση παραμέτρων

13. Να βρείτε για ποιες τιμές των λ και μ η ανίσωση $\lambda x - 3\mu < 2(2x+3)$:
i) είναι αδύνατη, ii) αληθεύει για κάθε x.

Λύση

Φέρνουμε πρώτα την ανίσωση στη μορφή $Ax > B$ ή $Ax < B$.
Έχουμε: $\lambda x - 3\mu < 2(2x+3) \Leftrightarrow \lambda x - 3\mu < 4x + 6 \Leftrightarrow \lambda x - 4x < 3\mu + 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\lambda - 4)x < 3\mu + 6$.

i) Η ανίσωση είναι αδύνατη αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} \lambda - 4 = 0 \\ 3\mu + 6 \le 0 \end{cases} \quad \text{δηλαδή:} \quad \begin{cases} \lambda = 4 \\ \mu \le -2 \end{cases}$$

ii) Η ανίσωση αληθεύει για κάθε x αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} \lambda - 4 = 0 \\ 3\mu + 6 > 0 \end{cases} \quad \text{δηλαδή:} \quad \begin{cases} \lambda = 4 \\ \mu > -2 \end{cases}$$

γ Ερωτήσεις κατανόησης

14. Να συμπληρώσετε τον πίνακα, όπως φαίνεται στην πρώτη γραμμή:

Ανισότητα που ικανοποιεί ο πραγματικός αριθμός x	Διάστημα στο οποίο ανήκει ο πραγματικός αριθμός x
$3 \leq x < 5$	$[3, 5)$
$2 < x \leq 10$	
	$(-4, -1)$
$-3 \leq x \leq 1$	
	$(-\infty, 5]$
$x < -3$	
	$(-2, +\infty)$
$x \geq 17$	

15. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπως φαίνεται στην πρώτη γραμμή:

Ανισότητα που ικανοποιεί ο πραγματικός αριθμός x	Διάστημα στο οποίο ανήκει ο πραγματικός αριθμός x
$-3 < x \leq 1$	$(-3, 1]$
	$(-4, 2]$
$-3 < x < 2$	
	$[1, 5]$
$-2 \leq x < 1$	
	$(-\infty, 7)$
$x > 5$	
	$[-10, +\infty)$
$x \leq 12$	

16. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) και ποιες λανθασμένες (Λ).

	Σ	Λ
i) Αν α αριθμός του διαστήματος [–1, 0] και του [0, 3], τότε α = 0.	❑	❑
ii) Αν α αριθμός του διαστήματος [1, 3], τότε ο α ανήκει στο διάστημα [1, 2) ή στο (2, 3].	❑	❑
iii) Η λύση της εξίσωσης αx = β, με $1 \le \alpha \le 2$ και $3 < \beta \le 6$, είναι αριθμός του διαστήματος $\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right]$.	❑	❑
iv) Οι ανισώσεις $2 - \frac{x}{2} \le x + \frac{1}{2}$ και $3x \ge 3$ είναι ισοδύναμες.	❑	❑
v) Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων $2(x + 5) < 5 - x$ και $\frac{x}{3} \ge \frac{x}{4}$ είναι ακριβώς εκείνα τα x με $0 < x < 1$.	❑	❑
vi) Υπάρχει x στο $(-12, +\infty)$ για το οποίο αληθεύει η ανίσωση $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} \ge 2$.	❑	❑

17. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος x για τον οποίο ισχύει $-6x - 5 > 8$;

Α. 3 **Β.** –3 **Γ.** –2 **Δ.** 2

18. Ποιος είναι ο μικρότερος ακέραιος x για τον οποίο ισχύει $3 - 2x \le 10 + 3x$;

Α. –3 **Β.** –2 **Γ.** –1 **Δ.** 1

19. Αν $x \le 8x + 1 \le -4$ (1), τότε:

Α. $x \le 0$ **Β.** $-\frac{7}{8} \le x \le \frac{1}{8}$ **Γ.** $-\frac{5}{8} \le x \le \frac{3}{8}$

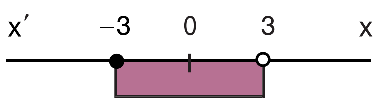
Δ. δεν υπάρχει τιμή του x για την οποία να ισχύει η (1)

20. Ισχύει $3x - 4 < 0$ και $4x - 1 < 3$ αν και μόνο αν:

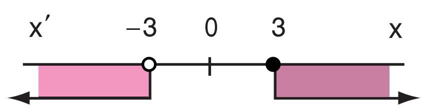
Α. $x < 1$ **Β.** $x < \frac{4}{3}$ **Γ.** $x > \frac{3}{4}$ **Δ.** $x < \frac{8}{7}$

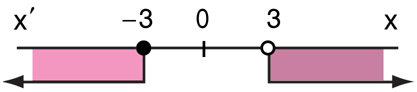
21. Αν $-x \ge 3$ ή $2x - 1 > 5$, τότε ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα δείχνει με γραμμοσκίαση το σύνολο στο οποίο υποχρεούται να βρίσκεται (να ανήκει) ο x;

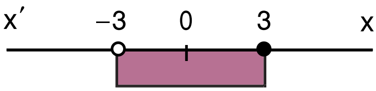
Α.



Β.



Γ. 

Δ. 

22. Αν ισχύει $\lambda(x-2) > 0$ για κάποιο $x < 2$, τότε:
Α. $\lambda < -2$ **Β.** $\lambda > 2$ **Γ.** $\lambda > 0$ **Δ.** $\lambda < 0$

23. Έστω η ανίσωση $(\lambda-1)x > \lambda^2 - 2$. Να εξετάσετε ποιο από τα παρακάτω πρέπει να συμβαίνει, ώστε η ανίσωση να αληθεύει για κάθε τιμή του x:
Α. $\lambda = 1$ **Β.** $\lambda = 2$ **Γ.** $\lambda = \sqrt{2}$ **Δ.** $\lambda = -\sqrt{2}$ **Ε.** $\lambda = 0$

24. Έστω η ανίσωση $(\lambda-2)x > 1+\lambda$. Να βρείτε ποιο από τα παρακάτω πρέπει να ισχύει, ώστε η ανίσωση να είναι αδύνατη:
Α. $\lambda = -1$ **Β.** $\lambda = -2$ **Γ.** $\lambda = 2$ **Δ.** $\lambda = 0$ **Ε.** $\lambda = 1$

25. Αν ($\alpha + 1 > 0$ και $2 - \alpha < 0$) ή ($\alpha + 1 < 0$ και $2 - \alpha > 0$), τότε:
Α. $\alpha < -2$ ή $\alpha > 1$ **Β.** $\alpha < -2$ ή $\alpha < 1$ **Γ.** $-1 < \alpha < 2$ **Δ.** $\alpha > 2$ ή $\alpha < -1$

26. Αν ($\alpha + 1 > 0$ και $3 - \alpha \geq 0$) ή ($\alpha + 1 < 0$ και $3 - \alpha \leq 0$), τότε:
Α. $-1 < \alpha \leq 3$ **Β.** $-1 \leq \alpha < 3$ **Γ.** $\alpha < -1$ ή $\alpha \geq 3$ **Δ.** $\alpha < 1$ ή $\alpha \geq -3$

27. Οι λύσεις της ανίσωσης $\dfrac{2}{x} > 1$ είναι:
Α. $x < 2$ **Β.** $x > -2$ **Γ.** $x > 0$ **Δ.** $0 < x < 2$

Ασκήσεις για λύση

Επίλυση ανίσωσης

28. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $2x + 1 \geq 4x - 3$ **ii)** $(x+1)^2 - (x-1)^2 < 0$
iii) $(2x+1)^3 + (x-2)^3 > 9x^3 + 6x^2 - 10$

29. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $5 - 3x > x + 2$ **ii)** $3x - 8 \leq 4x - 8$
iii) $(x-1)^2 + (x+3)^2 > 2(x-2)(x+1) + 38$

30. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $0 \cdot x < 2$ **ii)** $0 \cdot x < -1$ **iii)** $0 \cdot x > -1$

iv) $0 \cdot x > 0$ **v)** $0 \cdot x > 1$ **vi)** $0 \cdot x < 0$

31. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $0 \cdot x \geq 3$ **ii)** $0 \cdot x \geq 0$ **iii)** $0 \cdot x \geq -2$

iv) $0 \cdot x \leq 3$ **v)** $0 \cdot x \leq 0$ **vi)** $0 \cdot x \leq -1$

32. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $2(x-2) > 3(x-1) - x$ **ii)** $5(x-4) - 2(5-x) \leq 7(x-3)$

iii) $3x - 5(2-x) > 4(2x-1) + 7$ **iv)** $3(x+3) - 2(3x+1) > -3(x-1)$

v) $5(x+1) \geq 5 - 2(2-x) - 3(4-x)$ **vi)** $11 - 5(x-2) < 4(x+1) - 9(x+2)$

33. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x+5}{6} \geq \dfrac{x-2}{3}$ **ii)** $\dfrac{x-2}{2} + \dfrac{2x+1}{4} > \dfrac{x-1}{6}$

34. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{y+4}{6} + 2 > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{2} - 1 + \dfrac{y-2}{3}\right)$ **ii)** $\omega - \dfrac{\omega-3}{2} \leq \dfrac{\omega}{2} - \dfrac{\omega-4}{4}$

35. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{x-3}{2} - \dfrac{x-3}{3} > \dfrac{x+5}{6}$ **ii)** $\dfrac{x+5}{4} - \dfrac{x-3}{6} \geq \dfrac{x}{3}$

iii) $\dfrac{7-3x}{12} + \dfrac{3}{4} < 2(x-2) + \dfrac{5(5-2x)}{6}$

36. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{4x-9}{5} - \dfrac{x-9}{6} < \dfrac{2x+6}{3} - \dfrac{2x-15}{9}$ **ii)** $\dfrac{x}{2} - 1 < \dfrac{4-2x}{5} + \dfrac{3}{4}(x-2)$

iii) $\dfrac{(x-1)(x+5)}{3} - \dfrac{(x+2)(x+5)}{12} \geq \dfrac{(x-1)(x+2)}{4}$

37. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{(x+2)^2}{3} + \dfrac{(x-1)(x-2)}{2} \geq \dfrac{(5x+4)(x-3)}{6} + \dfrac{28}{3}$

ii) $\dfrac{(x-9)^2}{5} + \dfrac{(x-1)^2}{3} > \dfrac{(3x-5)(3x-7) - (x+1)(x-3)}{15}$

38. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x-5}{2} - \frac{x-5}{3} > \frac{x+5}{6}$ **ii)** $\frac{x-3}{2} - \frac{x-3}{3} \leq \frac{x+5}{6}$

iii) $\frac{5+2x}{12} - \frac{3-2x}{4} \geq \frac{2x-3}{6} + \frac{x-5}{3}$ **iv)** $\frac{x+2}{16} - \frac{2+x}{2} < \frac{x}{16} - \frac{3+2x}{4} - 1$

39. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $2x-3$ έχει τιμή:

i) τουλάχιστον 5 **ii)** το πολύ -1 **iii)** όχι μεγαλύτερη από 1
iv) όχι μικρότερη από 9 **v)** που υπερβαίνει το -7
vi) που δεν υπερβαίνει το 7 **vii)** μεταξύ των -5 και 9

40. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $-4x+2$ έχει τιμή:

i) τουλάχιστον 6 **ii)** το πολύ 10 **iii)** που υπερβαίνει το -2
iv) που δεν υπερβαίνει το -6 **v)** όχι μικρότερη από 18
vi) όχι μεγαλύτερη από 14 **vii)** μεταξύ των -10 και 26

41. Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες προσήμων (αφού πρώτα βρείτε τη ρίζα x_0 της παράστασης $αx + β$ που δίνεται κάθε φορά):

i)

x		
$2x-1$	0	

ii)

x		
$3x+6$	0	

iii)

x		
$-x+4$	0	

iv)

x		
$-2x-10$	0	

v)

x		
$-3x$	0	

vi)

x		
$2-5x$	0	

42. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς x για τους οποίους αληθεύει η ανίσωση:

i) $3x+2 \leq 9$ **ii)** $(x-2)\sqrt{2} < x-1$

43. Να βρείτε τον μικρότερο ακέραιο κ για τον οποίο ισχύει:

i) $-8,25 < κ < -3,54$ **ii)** $κ \geq -\frac{158}{3}$ **iii)** $-κ \leq \frac{612}{5}$

44. Να βρείτε τον μικρότερο φυσικό αριθμό ν για τον οποίο ισχύει $ν \geq \frac{256}{7}$.

45. Να βρείτε τον μικρότερο φυσικό αριθμό x για τον οποίο ισχύει:
i) $4x - 1 > 7$ ii) $5x - 2 > 10$ iii) $3x + 2 \geq -10$

46. Να βρείτε τον μικρότερο ακέραιο αριθμό x για τον οποίο ισχύει:
i) $2x + 15 > 7$ ii) $-x - 8 < -3$

47. Να βρείτε τον μεγαλύτερο φυσικό αριθμό ν του οποίου το τριπλάσιο, ελαττωμένο κατά 2, δεν υπερβαίνει το 15.

48. Αν $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, και $x \in (0, \pi)$, να βρείτε τον x.

49. Αν $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{5}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, και $x \in [0, 3\pi)$, να βρείτε τον x.

50. Αν $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, και $x \in [0, 2\pi)$, να βρείτε τον x.

51. Αν $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, και $x \in [0, 2\pi)$, να βρείτε τον x.

52. Αν $x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, και $x \in (-\pi, 3\pi]$, να βρείτε τον x.

Συναληθεύουσες ανισώσεις – Συστήματα ανισώσεων

53. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

i) $3x < 2(x + 1)$ και $3(x - 2) - \frac{x}{2} < 3x - 7$

ii) $\frac{5x + 1}{2} - \frac{1 - 3x}{5} > 3 - 2x$ και $\frac{x}{2} - 2 + \frac{5 - 2x}{5} < \frac{x - 2}{10} - \frac{2}{5}$

54. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:
i) $5x - 12 < 3x - 3$ και $2x + 3 \geq 1$

ii) $\frac{x + 4}{9} + \frac{x + 8}{8} > \frac{2x + 5}{7}$ και $\frac{x + 8}{4} - \frac{x - 4}{6} > \frac{x - 1}{3}$

55. Να λύσετε τα συστήματα των ανισώσεων:

i) $-2 \leq 6x + 3 \leq 3$ ii) $\frac{3x + 2}{4} < x - 1 \leq \frac{2 - x}{3}$

56. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $3(2x-5)-2(x-2)<2x-3$ και $x-(2x+10)\leq 3x-6$:
i) στο $\mathbb{R}$ **ii)** στο $\mathbb{Z}$ **iii)** στο $\mathbb{N}$

57. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x για τους οποίους συναληθεύουν οι ανισώσεις $-4(x+4)\leq 3(x+1)+4$ και $\dfrac{5(x-2)}{2}+3<\dfrac{3x+1}{2}$.

58. Αν $\alpha<\beta$ και $\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta\in(\alpha,\beta)$, να αποδείξετε ότι $\lambda\in(0,1)$.

Παραμετρικές ανισώσεις

59. Να λύσετε ως προς x τις ανισώσεις:
i) $\alpha x<2$ **ii)** $(\lambda-2)x\leq 5$ **iii)** $(3-\mu)x>2\mu-6$

60. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις, για τις διάφορες τιμές του μ:
i) $(\mu+1)(x-1)+\mu-3>4x-3$ **ii)** $\dfrac{2\mu(x-1)}{3}+1\geq\dfrac{3x}{4}-\dfrac{2\mu+1}{4}$

61. Να λύσετε ως προς x τις ανισώσεις:
i) $2\lambda x<5\lambda$ **ii)** $x+16\lambda^2\geq 4\lambda x+1$ **iii)** $\dfrac{\lambda x-2}{3}-\dfrac{x-3}{4}\leq\dfrac{\lambda-2x}{6}$

62. Να λύσετε ως προς x τις ανισώσεις:
i) $\lambda^2+x\leq 1-\lambda x$ **ii)** $(\lambda+1)^2x>1+2\lambda x$ **iii)** $2(x-\alpha)-(\alpha+1)^2<3-\alpha x$

63. Να λύσετε ως προς x τις ανισώσεις:
i) $\lambda x-5>\mu-3x$ **ii)** $(\lambda+2)x-2\mu\leq 3x-2$

64. Να λύσετε ως προς x τις ανισώσεις:
i) $\lambda(x-\lambda)<\mu(x-\mu)$ **ii)** $(\lambda-2)x>\mu+5$ **iii)** $(\lambda+1)x<\mu-\lambda+2$

Εύρεση παραμέτρων

65. Να βρείτε για ποιες τιμές του αριθμού λ είναι αδύνατη η ανίσωση (με άγνωστο x):
i) $0x<\lambda-2$ **ii)** $0x>\lambda+1$ **iii)** $0x\leq\lambda-4$
iv) $0x\geq-\lambda$ **v)** $(\lambda-1)x<0$ **vi)** $(\lambda+2)x>0$

66. Να βρείτε για ποιες τιμές του α αληθεύει για κάθε x η ανίσωση:
i) $0x < \alpha$ **ii)** $0x > \alpha - 1$ **iii)** $0x \leq \alpha + 2$
iv) $0x \geq \alpha - 2$ **v)** $(\alpha - 2)x \geq 0$ **vi)** $(\alpha + 1)x \leq 0$

67. **Α.** Να βρείτε για ποιες τιμές των α, β η ανίσωση $2(\alpha x + 5) \geq 5\beta - x$:
i) αληθεύει για κάθε x, **ii)** είναι αδύνατη.
Β. Ομοίως για την ανίσωση $\beta x - 4 > \alpha - x$.

68. Να βρείτε για ποιες τιμές των λ και μ η ανίσωση $\lambda(2x - 5) \leq 2(2x + 4\mu - 3)$:
i) είναι αδύνατη, **ii)** αληθεύει για κάθε x.

69. Να βρείτε για ποιες τιμές των λ και μ η ανίσωση $(\lambda - 1)^2 x \leq 1 - (\mu + 2)^2 x$ αληθεύει για κάθε τιμή του x.

70. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $\lambda x + \lambda^2 = 16 - 4x$ έχει μοναδική λύση, η οποία επιπλέον είναι θετική.

71. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $(1 + 2\lambda)x = 4\lambda^2 - 1$ έχει μοναδική λύση ως προς x, η οποία επιπλέον είναι αρνητική.

72. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $\lambda(x - 2\lambda) = 5(x - 10)$ έχει μοναδική λύση, η οποία μάλιστα ανήκει στο διάστημα:
i) $[20, +\infty)$ **ii)** $(-\infty, 24]$ **iii)** $[18, 26)$

73. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ανίσωση $(\lambda - 2)x = 2\lambda^2 - 8$ έχει:
i) θετική λύση **ii)** αρνητική λύση **iii)** λύση στο διάστημα $(2, 8)$

74. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ανίσωση $\lambda x \leq 4\lambda^2 - 5\lambda$ έχει σύνολο λύσεων το διάστημα $[-9, +\infty)$.

75. Δίνεται η εξίσωση $\frac{x + \lambda}{5} + 2 = \frac{6x - \lambda}{4} + \frac{\lambda}{20} - \frac{\lambda - 4x}{40}$ (1).
i) Να λύσετε την (1).
ii) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του λ για τις οποίες η λύση της (1) ανήκει στο διάστημα $\left[1, \frac{5}{2}\right)$.

76. Να βρείτε για ποιους θετικούς ακέραιους αριθμούς α η ανίσωση:
$(\alpha + \beta - 3)x > 5\alpha + 4\beta - 17$ αληθεύει για κάθε τιμή του x.