1.2 Μη γραμμικά συστήματα

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ìç ãñáììéêü óýóôçìá 2×2 ëÝãåôáé ïðïéïäÞðïôå óýóôçìá äýï åîéóþóåùí ìå äýï áãíþóôïõò ðåñéÝ÷åé ìßá ôïõëÜ÷éóôïí ìç ãñáììéêÞ åîßóùóç, äçëáäÞ Ý÷åé ìßá åîßóùóç ðïõ äåí åßíáé ìïñöÞò áx + ây = ã, üðïõ x, y åßíáé Üãíùóôïé êáé á, â, ã ðáñÜìåôñïé Þ óôáèåñÝò.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ç åîßóùóç $x^2 + y^2 = ñ^2$ (ñ > 0) åêöñÜæåé **êýêëï** ìå êÝíôñï Ï (0, 0) êáé áêôßíá ñ.
2. Ç åîßóùóç $x^2 = áy$ (á ≠ 0) åêöñÜæåé **ðáñáâïëÞ** ìå êïñõöÞ ôï Ï (0, 0) êáé Üîïíá óõììåôñßáò ôïí y΄y.
3. Ç åîßóùóç $y^2 = áx$ (á ≠ 0) åêöñÜæåé **ðáñáâïëÞ** ìå êïñõöÞ ôï Ï (0, 0) êáé Üîïíá óõììåôñßáò ôïí x΄x.
4. Ç åîßóùóç xy = á (á ≠ 0) åêöñÜæåé **õðåñâïëÞ**.

Μέθοδοι και εφαρμογές

1η ΜΕΘΟΔΟΣ: Επίλυση μη γραμμικών συστημάτων

Õðüäåéîç: Ëýíïõìå ìå ôç ìÝèïäï ôçò áíôéêáôÜóôáóçò. Áí ôï óýóôçìá Ý÷åé ëýóåéò, ïé ëýóåéò ðïõ èá âñïýìå åêöñÜæïõí ôá óçìåßá ôïìÞò ôùí ãñáöéêþí ðáñáóôÜóåùí ôùí äýï ãñáììþí ðïõ ðáñéóôÜíïõí ïé áñ÷éêÝò åîéóþóåéò.

1. Íá ëýóåôå ôá óõóôÞìáôá:

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

á) $\begin{cases} \mathbf{x+y=2} \\ \mathbf{y^2=x} \end{cases}$, **â)** $\begin{cases} \mathbf{x^2+y^2=29} \\ \mathbf{yx=10} \end{cases}$

êáé íá åñìçíåýóåôå ãåùìåôñéêÜ ôá áðïôåëÝóìáôá.

Λύση

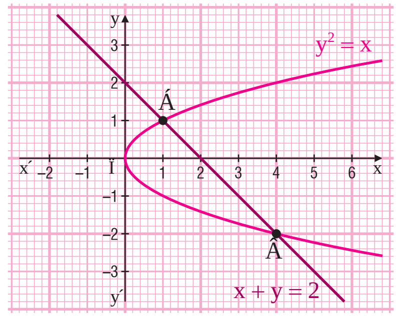
á) $\begin{cases} x+y=2 \\ y^2=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ y^2=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ y^2=2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y & \textbf{(I)} \\ y^2+y-2=0 & \textbf{(II)} \end{cases}$.

Ç åîßóùóç (II) åßíáé 2ïõ âáèìïý ìå Ä = 9 êáé ñßæåò y = 1 Þ y = –2, ïðüôå êáé ìå ôç âïÞèåéá ôçò (I) Ý÷ïõìå:

- Αν $y = 1$, τότε $x = 2 - 1 = 1$.
- Αν $y = -2$, τότε $x = 2 - (-2) = 4$.

Συνεπώς $(x, y) = (1, 1)$ ή $(x, y) = (4, -2)$.

Η εξίσωση $x + y = 2$ εκφράζει ευθεία που περνάει από τα σημεία $(2, 0)$ και $(0, 2)$, ενώ η εξίσωση $y^2 = x$ εκφράζει παραβολή με κορυφή το Ο$(0, 0)$ και άξονα συμμετρίας τον $x΄x$. Οι δύο λύσεις του συστήματος των εξισώσεων εκφράζουν τα σημεία τομής τους, που είναι τα Α$(1, 1)$ και Β$(4, -2)$.



β) Αφού $xy = 10$, θα ισχύει ότι $x \neq 0$ και $y \neq 0$. Τότε:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ yx = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 29 = 0 \\ y = \dfrac{10}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(\dfrac{10}{x}\right)^2 - 29 = 0 \\ y = \dfrac{10}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 x^2 + x^2 \dfrac{100}{x^2} - 29x^2 = 0 \\ y = \dfrac{10}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 29x^2 + 100 = 0 & \textbf{(I)} \\ y = \dfrac{10}{x} & \textbf{(II)} \end{cases}.$$

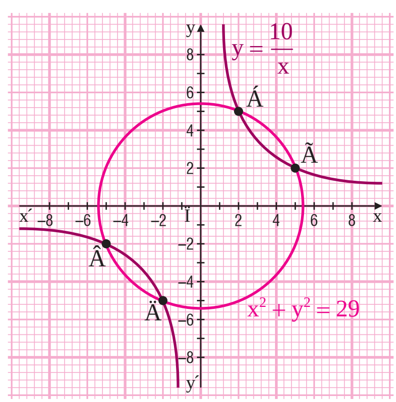
Θέτοντας στην σχέση (I) $u = x^2$, προκύπτει $u^2 - 29u + 100 = 0$, η οποία έχει $Δ = 441$ και $u = 4$ ή $u = 25 \Leftrightarrow x^2 = 4$ ή $x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 2$ ή $x = \pm 5$.

Αντικαθιστώντας λοιπόν στην (II), βρίσκουμε ότι:

- Αν $x = 2$, τότε $y = 5$.
- Αν $x = -2$, τότε $y = -5$.
- Αν $x = 5$, τότε $y = 2$.
- Αν $x = -5$, τότε $y = -2$.

Συνεπώς $(x, y) = (2, 5)$ ή $(x, y) = (-2, -5)$ ή $(x, y) = (5, 2)$ ή $(x, y) = (-5, -2)$.

Η εξίσωση $x^2 + y^2 = 29$ εκφράζει κύκλο με κέντρο Ο$(0, 0)$ και ακτίνα $\sqrt{29}$, ενώ η εξίσωση $xy = 10$ εκφράζει υπερβολή στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο. Οι τέσσερις λύσεις του συστήματος των εξισώσεων εκφράζουν τα σημεία τομής τους, που είναι τα Α$(2, 5)$, Β$(-5, -2)$, Γ$(5, 2)$ και Δ$(-2, -5)$.



2. **Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$ και να ερμηνεύσετε γραφικά τις λύσεις του. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των δύο γραμμών.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

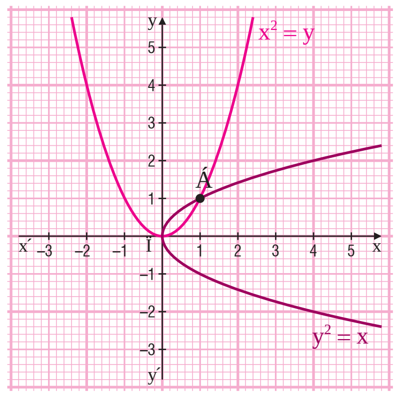
$$\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ (x^2)^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ x = 0 \text{ ή } x = 1 \end{cases}.$$

Κάθε εξίσωση της μορφής $x^2 = αy$ ή $y^2 = αx$ $(α \neq 0)$ παριστάνει παραβολή.

- Αν $x = 0$, βρίσκουμε $y = 0$.
- Αν $x = 1$, βρίσκουμε $y = 1$.

Οι εξισώσεις που αποτελούν το παραπάνω σύστημα, αν παρασταθούν σε σύστημα συντεταγμένων, εκφράζουν δύο παραβολές. Οι λύσεις (0, 0) και (1, 1) του συστήματος είναι οι συντεταγμένες των σημείων τομής των παραβολών, δηλαδή των σημείων Ο (0, 0) και Α(1, 1).



3. **Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$ και να ερμηνεύσετε γραφικά τις λύσεις του. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των δύο γραμμών.**

Λύση

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+y)^2 + y^2 = 4 \\ x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2y + y^2 + y^2 = 4 \\ x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 2y - 3 = 0 & \textbf{(I)} \\ x = y + 1 & \textbf{(II)} \end{cases}.$$

Κάθε εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 = ρ^2$ $(ρ \neq 0)$ εκφράζει κύκλο με κέντρο το Ο (0, 0) και ακτίνα ίση με $|ρ|$.

Η εξίσωση (I) είναι 2ου βαθμού με $Δ = 28 > 0$ και

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2} \text{ ή } y = \frac{-1 - \sqrt{7}}{2}.$$

Από τη (II) έχουμε:

- Αν $y = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$, τότε $x = \frac{-1+\sqrt{7}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.
- Αν $y = \frac{-1-\sqrt{7}}{2}$, τότε $x = \frac{-1-\sqrt{7}}{2} + 1 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$.

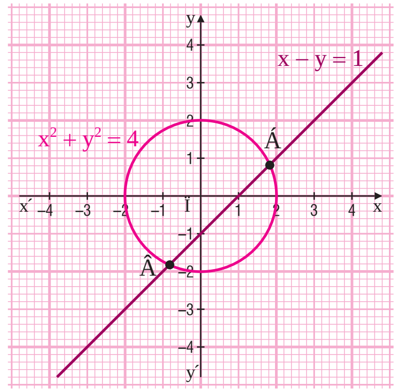
Επομένως οι λύσεις είναι οι:

Οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων εκφράζουν τις συντεταγμένες των σημείων τομής.

$$(x, y) = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, \frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right)$$

ή $(x, y) = \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, \frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right)$.

Οι εξισώσεις που αποτελούν το παραπάνω σύστημα, αν παρασταθούν σε σύστημα συντεταγμένων, εκφράζουν έναν κύκλο ($x^2 + y^2 = 4$) και μια ευθεία ($x - y = 1$). Οι λύσεις αυτού του συστήματος είναι οι συντεταγμένες των σημείων τομής τους.
Δίπλα φαίνεται η **γραφική επίλυση του συστήματος**, η οποία όμως, όπως είναι φανερό, δεν μας δίνει ακριβείς λύσεις.



4. **Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x + y = 16 \\ xy = 63 \end{cases}$ και να ερμηνεύσετε γραφικά τις λύσεις του. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των δύο γραμμών.**

Λύση

Κάθε εξίσωση της μορφής $xy = \rho$ $(\rho \neq 0)$ εκφράζει υπερβολή.

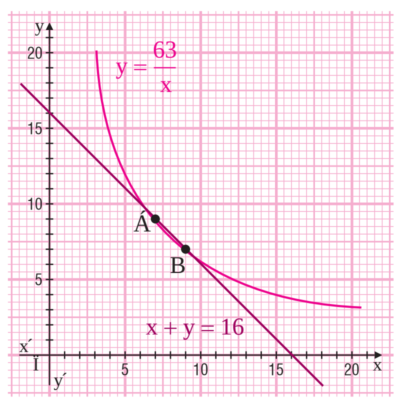
$$\begin{cases} x+y=16 \\ xy=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16-y \\ xy=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16-y \\ (16-y)y=63 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=16-y \\ 16y-y^2=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16-y & \text{(I)} \\ y^2-16y+63=0 & \text{(II)} \end{cases}.$$

Η (II) έχει $\Delta = 4$ και $y = 9$ ή $y = 7$. Τότε:

- Αν $y = 9$, από την (I) βρίσκουμε $x = 7$.
- Αν $y = 7$, από την (I) βρίσκουμε $x = 9$.

Οι εξισώσεις που αποτελούν το σύστημα, αν παρασταθούν σε σύστημα συντεταγμένων, εκφράζουν μια υπερβολή ($xy = 63$) και μια ευθεία ($x + y = 16$). Οι λύσεις (7, 9) και (9, 7) του συστήματος είναι οι συντεταγμένες των σημείων τομής τους στο σύστημα των συντεταγμένων, δηλαδή των Α(7, 9) και Β(9, 7).



5. **Να λύσετε το σύστημα** $\begin{cases} 3x+y=-1 \\ x^2-xy=14 \end{cases}$.

Λύση

$$\begin{cases} 3x+y=-1 \\ x^2-xy=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-3x \\ x^2-xy=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-3x \\ x^2-x(-1-3x)=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-3x \\ x^2+x+3x^2=14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-3x & \textbf{(I)} \\ 4x^2+x-14=0 & \textbf{(II)} \end{cases}.$$

Η εξίσωση (II) είναι 2ου βαθμού με $\Delta = 225$ και $x=-2$ ή $x=\frac{7}{4}$. Συνεπώς:

- Αν $x=-2$, από την (I) βρίσκουμε $y=-1-3(-2)=5$.
- Αν $x=\frac{7}{4}$, από την (I) βρίσκουμε $y=-1-3\cdot\frac{7}{4}=-\frac{25}{4}$.

Επομένως $(x, y)=(-2, 5)$ ή $(x, y)=\left(\frac{7}{4}, -\frac{25}{4}\right)$.

6. **Να λύσετε το σύστημα** $\begin{cases} x^3+y^3=28 \\ xy(x+y)=12 \end{cases}$.

Λύση

$$\begin{cases} x^3+y^3=28 \\ xy(x+y)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-3xy(x+y)=28 \\ xy(x+y)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-3\cdot12=28 \\ xy(x+y)=12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3=64 \\ xy(x+y)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\sqrt[3]{64} \\ xy(x+y)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ xy(x+y)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ 4xy=12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4-y \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-y \\ (4-y)y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-y \\ 4y-y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-y & \textbf{(I)} \\ y^2-4y+3=0 & \textbf{(II)} \end{cases}.$$

Η (II) έχει $\Delta = 4$, οπότε $y=1$ ή $y=3$.

- Αν $y=1$, από την (I) βρίσκουμε $x=4-1=3$.
- Αν $y=3$, από την (I) βρίσκουμε $x=4-3=1$.

Επομένως $(x, y)=(3, 1)$ ή $(x, y)=(1, 3)$.

7. **Να λύσετε το σύστημα** $\begin{cases} 2xy+4y^2-5y=0 \\ y=2x^2-3x+1 \end{cases}$.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

$$\begin{cases} 2xy+4y^2-5y=0 \\ y=2x^2-3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(2x+4y-5)=0 \\ y=2x^2-3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \text{ ή } 2x+4y-5=0 \\ y=2x^2-3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \text{ ή } 4y=5-2x \\ y=2x^2-3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \text{ ή } y=\dfrac{5-2x}{4} & \textbf{(I)} \\ y=2x^2-3x+1 & \textbf{(II)} \end{cases}.$$

- Áí y = 0, ôüôå áðü ôç (II) Ý÷ïõìå $2x^2 - 3x + 1 = 0$, ðïõ åßíáé åîßóùóç 2ïõ âáèìïý ìå $Ä = 1$ êáé ñßæåò $x = 1$ Þ $x = \frac{1}{2}$, ïðüôå $(x, y) = (1, 0)$ Þ $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
- Áí $y = \frac{5-2x}{4}$, ôüôå áðü ôç (II) Ý÷ïõìå $\frac{5-2x}{4} = 2x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5 - 2x = 8x^2 - 12x + 4 \Leftrightarrow 8x^2 - 10x - 1 = 0$, ðïõ åßíáé åîßóùóç 2ïõ âáèìïý ìå $Ä = 132$ êáé ñßæåò $x = \frac{10 \pm \sqrt{132}}{16} \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm 2\sqrt{33}}{16} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{8}$.

  - Áí $x = \frac{5+\sqrt{33}}{8}$, ôüôå áðü ôçí (I) âñßóêïõìå:

$$y = \frac{5 - 2\cdot\frac{5+\sqrt{33}}{8}}{4} \Leftrightarrow y = \frac{\frac{20-5-\sqrt{33}}{4}}{4} \Leftrightarrow y = \frac{15-\sqrt{33}}{16},$$

ïðüôå $(x, y) = \left(\frac{5+\sqrt{33}}{8}, \frac{15-\sqrt{33}}{16}\right)$.

  - Áí $x = \frac{5-\sqrt{33}}{8}$, ôüôå áðü ôçí (I) âñßóêïõìå:

$$y = \frac{5 - 2\cdot\frac{5-\sqrt{33}}{8}}{4} \Leftrightarrow y = \frac{\frac{20-5+\sqrt{33}}{4}}{4} \Leftrightarrow y = \frac{15+\sqrt{33}}{16},$$

ïðüôå $(x, y) = \left(\frac{5-\sqrt{33}}{8}, \frac{15+\sqrt{33}}{16}\right)$.

ÅðïìÝíùò $(x, y) = (1, 0)$ Þ $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Þ $(x, y) = \left(\frac{5+\sqrt{33}}{8}, \frac{15-\sqrt{33}}{16}\right)$ Þ $(x, y) = \left(\frac{5-\sqrt{33}}{8}, \frac{15+\sqrt{33}}{16}\right)$.

8. **Áðü ôç Öõóéêÿ Þ ãíùñßæïõìå üôé óôçí åõèýãñáììç ïìáëÜ åðéôá÷õíüìåíç êßíçóç ôï äéÜóôçìá åßíáé $x = õ_0t + \frac{1}{2}át^2$ êáé ç ôá÷ýôçôá åßíáé $õ = õ_0 + át$. Íá åêöñÜóåôå ôçí åðéôÜ÷õíóç á êáé ôïí ÷ñüíï t óõíáñôÞóåé ôùí x, õ, $õ_0$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Ïõóéáóôéêþ Ý÷ïõìå íá ëýóïõìå ôï óýóôçìá ôùí åîéóþóåùí ùò ðñïò á, t:

$$\begin{cases} x = õ_0 t + \frac{1}{2} á t^2 \\ õ = õ_0 + á t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2õ_0 t + á t t \\ á t = õ - õ_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2õ_0 t + (õ - õ_0) t \\ á t = õ - õ_0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = (2õ_0 + õ - õ_0) t \\ á t = õ - õ_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = (õ_0 + õ) t \\ á t = õ - õ_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{2x}{õ_0 + õ} \\ á t = õ - õ_0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{2x}{õ_0 + õ} \\ á \dfrac{2x}{õ_0 + õ} = õ - õ_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{2x}{õ_0 + õ} \\ á = \dfrac{(õ - õ_0)(õ_0 + õ)}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{2x}{õ_0 + õ} \\ á = \dfrac{õ^2 - õ_0^2}{2x} \end{cases}.$$

2η ΜΕΘΟΔΟΣ: Προβλήματα

Õðüäåéîç: ÈÝôïõìå ìå ìåôáâëçôÝò ôéò Üãíùóôåò ðïóüôçôåò êáé äçìéïõñãïýìå åßôå óýóôçìá åîéóþóåùí åßôå åîßóùóç, ôá ïðïßá ëýíïõìå.

9. **Áí êÜèå äýï áðÝíáíôé ðëåõñÝò åíüò ôåôñáãþíïõ áõîçèïýí êáôÜ 2 m êáé 3 m áíôßóôïé÷á, ðñïêýðôåé Ýíá ïñèïãþíéï, ôï ïðïßï ìáæß ìå ôï ôåôñÜãùíï Ý÷åé åìâáäüí 81 m².**
Íá âñåßôå ôçí ðëåõñÜ ôïõ ôåôñáãþíïõ.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Áí x m (x > 0) åßíáé ç ðëåõñÜ ôïõ ôåôñáãþíïõ, ôï åìâáäüí ôïõ åßíáé x^2 m^2 êáé ïé ðëåõñÝò ôïõ ïñèïãùíßïõ åßíáé (x + 2) m êáé (x + 3) m, ìå áíôßóôïé÷ï åìâáäüí ïñèïãùíßïõ $y = (x + 2)(x + 3)$ m^2.
Áöïý ôï ïñèïãþíéï êáé ôï ôåôñÜãùíï Ý÷ïõí åìâáäüí 81 m^2, Ý÷ïõìå $y + x^2 = 81$.
ÅðïìÝíùò:

$$\begin{cases} y = (x+2)(x+3) \\ y + x^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 81 - x^2 = x^2 + 5x + 6 \\ y = 81 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 75 = 0 \quad \textbf{(I)} \\ y = 81 - x^2 \end{cases}.$$

Ç (I) Ý÷åé $Ä = 625$ êáé ñßæåò $x = -\dfrac{15}{2}$ (áðïññßðôåôáé) Þ $x = 5$ m.

10. **Ç êõñßá Ì áãüñáóå ðåôóÝôåò ðëçñþíïíôáò 24 åõñþ. Áí ìå ôá ßäéá ÷ñÞìáôá áãüñáæå 4 ðåôóÝôåò åðéðëÝïí, èá ðëÞñùíå 0,2 åõñþ ëéãüôåñá ãéá êÜèå ðåôóÝôá. Ðüóï êïóôßæåé êÜèå ðåôóÝôá;**

Λύση

¸óôù x (x > 0) ïé ðåôóÝôåò ðïõ áãüñáóå ç êõñßá Ì áñ÷éêÜ êáé y åõñþ (y > 0) ôï êüóôïò ôçò êáèåìßáò.

Τότε $xy = 24 \Leftrightarrow y = \frac{24}{x}$ **(Ι)**.

Όμως, αν αγόραζε $x + 4$ πετσέτες με τα 24 ευρώ, θα πλήρωνε 0,2 ευρώ λιγότερα ανά πετσέτα, άρα $(y - 0{,}2)(x + 4) = 24$ **(ΙΙ)**.

Από τις (Ι), (ΙΙ) έχουμε:

$$\left(\frac{24}{x} - 0{,}2\right)(x+4) = 24 \Leftrightarrow \frac{24}{x}x - 0{,}2x + \frac{24}{x}4 - 0{,}2\cdot 4 = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}2x + \frac{96}{x} - 0{,}8 = 0 \Leftrightarrow -0{,}2xx + \frac{96}{x}x - 0{,}8x = 0x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}2x^2 + 96 - 0{,}8x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x - 960 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 480 = 0,$$

όπου $\Delta = 4^2 - 4\cdot 1(-480) = 1.936 > 0$,

οπότε $x = \frac{-4 \pm \sqrt{1.936}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 44}{2} \Leftrightarrow x = 20$ ή $x = -24$ (απορρίπτεται),

άρα αρχικά αγοράστηκαν 20 πετσέτες.

Συνεπώς, από την (Ι), κάθε πετσέτα κοστίζει $\frac{24}{20} = 1{,}2$ ευρώ.

11. **Δύο εργάτες χρειάζονται 6 μέρες για να εκτελέσουν ένα έργο μαζί. Αν ο ένας χρειάζεται 5 μέρες λιγότερες από τον άλλο για να το τελειώσει μόνος του, πόσες μέρες χρειάζεται ο καθένας μόνος του για να τελειώσει το έργο;**

Λύση

Έστω x ($x > 0$) οι μέρες που χρειάζεται ένας μόνος του για την περάτωση του έργου, οπότε $x + 5$ μέρες χρειάζεται ο άλλος μόνος του.

Επομένως σε μία μέρα ο καθένας μόνος του φτιάχνει το $\frac{1}{x}$ και το $\frac{1}{x+5}$ του έργου αντίστοιχα. Άρα σε 6 μέρες ο καθένας φτιάχνει τα $\frac{6}{x}$ και τα $\frac{6}{x+5}$ του έργου αντίστοιχα, όμως και οι δύο μαζί ολοκληρώνουν το έργο, οπότε:

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{x+5} = 1 \Leftrightarrow x(x+5)\frac{6}{x} + x(x+5)\frac{6}{x+5} = x(x+5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6(x+5) + 6x = x(x+5) \Leftrightarrow 6x + 30 + 6x = x^2 + 5x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 6x - 30 - 6x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 30 = 0,$$

όπου $\Delta = (-7)^2 - 4\cdot 1(-30) = 169 > 0$ και οι λύσεις είναι:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{169}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 13}{2} \Leftrightarrow x = 10 \text{ ή } x = -3 \text{ (απορρίπτεται).}$$

Συνεπώς ο ένας θέλει 10 μέρες για να τελειώσει μόνος του το έργο, ενώ ο άλλος θέλει 15 μέρες.

3η ΜΕΘΟΔΟΣ: Παραμετρικά συστήματα

Υπόδειξη: Λύνουμε τα συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης και διακρίνουμε περιπτώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου.

12. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να προσδιορίσετε τον αριθμό των λύσεων του συστήματος $\begin{cases} x^2 = 2y \\ y = x + \mu \end{cases}$ και να βρείτε τις λύσεις σε κάθε περίπτωση.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

$$\begin{cases} x^2 = 2y \\ y = x+\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2(x+\mu) \\ y = x+\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2x+2\mu \\ y = x+\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2\mu = 0 & \textbf{(I)} \\ y = x+\mu & \textbf{(II)} \end{cases}.$$

Η εξίσωση (I) έχει $\Delta = 4 + 8\mu$. Τότε:

- Αν $4 + 8\mu > 0 \Leftrightarrow 8\mu > -4 \Leftrightarrow \mu > -\frac{1}{2}$, η εξίσωση (I) έχει δύο άνισες ρίζες, τις $x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8\mu}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+2\mu}$, οπότε από τη (II) έχουμε $y = 1 + \mu \pm \sqrt{1+2\mu}$.
- Αν $\mu = -\frac{1}{2}$, η εξίσωση (I) έχει μία διπλή ρίζα, τη $x = 1$, οπότε από τη (II) βρίσκουμε $y = \frac{1}{2}$.
- Αν $\mu < -\frac{1}{2}$, η εξίσωση (I) είναι αδύνατη, άρα και το σύστημα είναι αδύνατο.

13. Δίνονται η παραβολή $y = 2x^2$ και η ευθεία $x + y = k$, όπου $k \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πλήθος των κοινών τους σημείων για τις διάφορες τιμές του k.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Το πλήθος των σημείων τομής της παραβολής και της ευθείας εξαρτάται από το πλήθος των λύσεων του συστήματος των εξισώσεών τους.

Επομένως $\begin{cases} y = 2x^2 \\ x + y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ y = k - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - x = 2x^2 \\ y = k - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - k = 0 & \textbf{(I)} \\ y = k - x & \textbf{(II)} \end{cases}.$

Το πλήθος των λύσεων του συστήματος εξαρτάται από το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης (I), η οποία έχει $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2(-k) = 1 + 8k$.

Επομένως:

- Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 + 8k > 0 \Leftrightarrow 8k > -1 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{8}$, η εξίσωση (I) έχει δύο λύσεις, άρα και το σύστημα έχει δύο λύσεις, οπότε η παραβολή και η ευθεία έχουν δύο κοινά σημεία.

- Áí $Ä=0 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{8}$, ç åîßóùóç (I) Ý÷åé ìßá äéðëÞ ëýóç, Üñá êáé ôï óýóôçìá Ý÷åé ìßá ëýóç, ïðüôå ç ðáñáâïëÞ êáé ç åõèåßá Ý÷ïõí Ýíá êïéíü óçìåßï.
- Áí $Ä<0 \Leftrightarrow k<-\frac{1}{8}$, ç åîßóùóç (I) äåí Ý÷åé ðñáãìáôéêÝò ëýóåéò, Üñá êáé ôï óý-óôçìá äåí Ý÷åé ëýóç, ïðüôå ç ðáñáâïëÞ êáé ç åõèåßá äåí Ý÷ïõí êïéíÜ óçìåßá.

14. **Íá âñåèåß ç ó÷Ýóç ðïõ óõíäÝåé ôá $ë, ì \in \mathbb{R}$ þóôå ôï óýóôçìá $\begin{cases} x^2-3y+ì=2xy \\ y-x=ë \end{cases}$ íá åßíáé áäýíáôï.**

Λύση

$$\begin{cases} x^2-3y+ì=2xy \\ y-x=ë \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3y+ì=2xy \\ y=x+ë \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3(x+ë)+ì=2x(x+ë) \\ y=x+ë \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-3ë+ì=2x^2+2xë \\ y=x+ë \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+2xë-x^2+3x+3ë-ì=0 \\ y=x+ë \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(2ë+3)x+3ë-ì=0 & \textbf{(É)} \\ y=x+ë & \textbf{(ÉÉ)} \end{cases}.$$

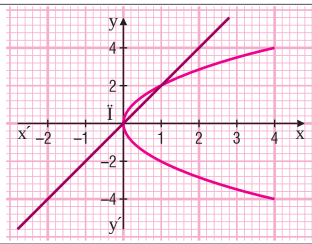
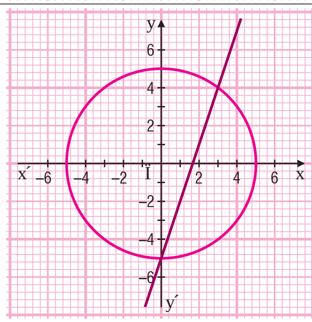
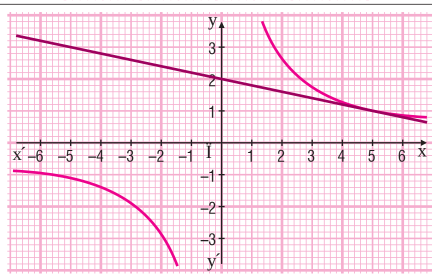
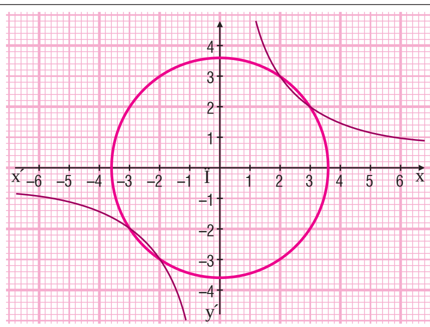
Ç åîßóùóç (I) åßíáé 2ïõ âáèìïý ìå:
$Ä=(2ë+3)^2-4(3ë-ì)=4ë^2+12ë+9-12ë+4ì=4ë^2+9+4ì$.
Ôï áñ÷éêü óýóôçìá åßíáé áäýíáôï üôáí ôï ôñéþíõìï (I) åßíáé áäýíáôï, äçëáäÞ üôáí $Ä<0 \Leftrightarrow 4ë^2+9+4ì<0$.

Ερωτήσεις νέου τύπου

4 **Να σημειώσετε Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις.**

1. Ôï óýóôçìá $\begin{cases} x^2+y=-5 \\ y+3x=0 \end{cases}$ åßíáé áäýíáôï. ☐
2. Ôï óýóôçìá $\begin{cases} 2xy-5y^2+3y=0 \\ y+x=0 \end{cases}$ Ý÷åé ëýóç (0, 0). ☐
3. Ôï óýóôçìá $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 0x+0y=0 \end{cases}$ Ý÷åé Üðåéñåò ëýóåéò ôçò ìïñöÞò $(ê, \pm ê)$, $ê \in \mathbb{R}$. ☐
4. Áí $ë=2$, ôï óýóôçìá $\begin{cases} ëx^2-4x+2ë=4y-4 \\ y-x=0 \end{cases}$ Ý÷åé ìïíáäéêÞ ëýóç. ☐

4 **Να αντιστοιχίσετε τα σχήματα της 1ης στήλης με τα συστήματα των εξισώσεών τους της 2ης στήλης.**

	1ς óôÞëç	2ς óôÞëç	
		$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 2x \end{cases}$	**Α**
1		$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ yx = 6 \end{cases}$	**Β**
2		$\begin{cases} xy = 5 \\ 5y + x = 10 \end{cases}$	**Γ**
3		$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 4x \end{cases}$	**Δ**
4		$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$	**Ε**
		$\begin{cases} xy = 5 \\ y + 5x = 2 \end{cases}$	**ΣΤ**

Ασκήσεις προς λύση

4 Α΄ Ομάδα

1. Íá ëýóåôå êáéíá åñìçíåýóåôå ãñáöéêÜ ôá áêüëïõèá óõóôÞìáôá:

á) $\begin{cases} x+y=6 \\ y^2=3x \end{cases}$, â) $\begin{cases} x+y=8 \\ y^2=-7x \end{cases}$, ã) $\begin{cases} x+y=15 \\ y^2=4x \end{cases}$, ä) $\begin{cases} -x+2y=6 \\ y^2=6x \end{cases}$.

2. Íá ëýóåôå êáéíá åñìçíåýóåôå ãñáöéêÜ ôá áêüëïõèá óõóôÞìáôá:

á) $\begin{cases} 2x-y=6 \\ x^2=8y \end{cases}$, â) $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2=-y \end{cases}$, ã) $\begin{cases} 5x+2y=7 \\ x^2=-2y \end{cases}$, ä) $\begin{cases} x+3y=6 \\ x^2=9y \end{cases}$.

3. Íá ëýóåôå êáéíá åñìçíåýóåôå ãñáöéêÜ ôá áêüëïõèá óõóôÞìáôá:

á) $\begin{cases} 2x+y=-3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$, â) $\begin{cases} x-y=5 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$, ã) $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$, ä) $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$.

4. Íá ëýóåôå êáéíá åñìçíåýóåôå ãñáöéêÜ ôá áêüëïõèá óõóôÞìáôá:

á) $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=12 \end{cases}$, â) $\begin{cases} x-y=2 \\ xy=15 \end{cases}$, ã) $\begin{cases} 2x+y=10 \\ xy=8 \end{cases}$, ä) $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=-2 \end{cases}$.

5. Íá ëýóåôå êáéíá åñìçíåýóåôå ãñáöéêÜ ôá áêüëïõèá óõóôÞìáôá:

á) $\begin{cases} yx=9 \\ x^2=3y \end{cases}$, â) $\begin{cases} x^2+y^2=45 \\ y^2=12x \end{cases}$, ã) $\begin{cases} x^2+y^2=41 \\ xy=20 \end{cases}$,

ä) $\begin{cases} x^2=9y \\ 3y^2=x \end{cases}$, å) $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2=-y \end{cases}$, óô) $\begin{cases} xy=16 \\ y^2=32x \end{cases}$.

6. Íá ëýóåôå ôá óõóôÞìáôá:

á) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x^2+9=y^2 \end{cases}$, â) $\begin{cases} 3x+4y=13 \\ x^2-5xy=-6 \end{cases}$, ã) $\begin{cases} x-3y=3 \\ xy=6 \end{cases}$.

7. Íá âñåßôå ôá êïéíÜ óçìåßá ôçò ðáñáâïëÞò ìå åîßóùóç $y=-3x^2$ êáé ôçò åõèåßáò ìå åîßóùóç $y=x-4$.

8. Íá âñåßôå ôá êïéíÜ óçìåßá ôïõ êýêëïõ ìå åîßóùóç $y^2+x^2=8$ êáé ôçò åõèåßáò ìå åîßóùóç $y=-x$.

9. Ôá Ýîïäá ãéá Ýíá ãåýìá Þôáí 100 €. ¼ìùò ìåôáîý ôùí áôüìùí ðïõ Ýêáíáí ìÝñïò õðÞñ÷áí êáé 5 öéëïîåíïýìåíïé, ïðüôå ïé õðüëïéðïé áíáãêÜóôçêáí íá âÜëïõí áðü 1 € åðéðëÝïí óå ó÷Ýóç ìå ôï ðïóü ðïõ ôïõò áíáëïãïýóå. Ðüóá Üôïìá Ýêáíáí óõíïëéêÜ ìÝñïò óôï ãåýìá;

10. Áðü ôç Öõóéêþ ãíùñßæïõìå üôé óôçí åõèýãñáììç ïìáëÜ åðéâñáäõíüìåíç êßíçóç ôï äéÜóôçìá åßíáé $x = \text{õ}_0 t - \frac{1}{2}\text{á}t^2$ êáé ç ôá÷ýôçôá åßíáé $\text{õ} = \text{õ}_0 - \text{á}t$. Íá åêöñÜóåôå ôçí åðéôÜ÷õíóç á êáé ôïí ÷ñüíï t óõíáñôÞóåé ôùí $x, \text{õ}, \text{õ}_0$.

11. Áðü ôç Öõóéêþ ãíùñßæïõìå üôé óôçí ïìáëÜ åðéôá÷õíüìåíç óôñïöéêÞ êßíçóç ç ãùíéáêÞ ìåôáôüðéóç åßíáé $\text{è} = \text{ù}_0 t + \frac{1}{2}\text{á}_{\text{ãùí}}t^2$ êáé ç ãùíéáêÞ ôá÷ýôçôá åßíáé $\text{ù} = \text{ù}_0 + \text{á}_{\text{ãùí}}t$. Íá åêöñÜóåôå ôç ãùíéáêÞ åðéôÜ÷õíóç $\text{á}_{\text{ãùí}}$ êáé ôïí ÷ñüíï t óõíáñôÞóåé ôùí $\text{è}, \text{ù}, \text{ù}_0$.

12. Íá âñåßôå ôéò äéáóôÜóåéò åíüò ïñèïãùíßïõ ìå äéáãþíéï 20 m êáé åìâáäüí 192 m^2.

13. Íá âñåßôå ôéò äéáóôÜóåéò åíüò ïñèïãùíßïõ ôñéãþíïõ ìå õðïôåßíïõóá 13 m êáé åìâáäüí 30 m^2.

14. Íá âñåßôå äýï áñéèìïýò ðïõ Ý÷ïõí Üèñïéóìá, ãéíüìåíï êáé ðçëßêï ôïí ßäéï áñéèìü.

4 Β΄ Ομάδα

15. Ãéá ôéò äéÜöïñåò ôéìÝò ôïõ $\text{ì} \in \mathbb{R}$ íá ðñïóäéïñßóåôå ôïí áñéèìü ôùí ëýóåùí ôïõ óõóôÞìáôïò $\begin{cases} x^2 = 3y \\ y = 2x + \text{ì} \end{cases}$ êáéíá âñåßôå ôéò ëýóåéò óå êÜèå ðåñßðôùóç.

16. Ãéá ôéò äéÜöïñåò ôéìÝò ôïõ $\text{ì} \in \mathbb{R}$ íá ðñïóäéïñßóåôå ôïí áñéèìü ôùí ëýóåùí ôïõ óõóôÞìáôïò $\begin{cases} y^2 = 5x \\ x = 2y - \text{ì} \end{cases}$ êáéíá âñåßôå ôéò ëýóåéò óå êÜèå ðåñßðôùóç.

17. Ãéá ôéò äéÜöïñåò ôéìÝò ôïõ $\text{ì} \in \mathbb{R}$ íá ðñïóäéïñßóåôå ôï ðëÞèïò ôùí êïéíþí óçìåßùí ôùí ãñáììþí ìå åîéóþóåéò $x^2 + y^2 = 25$, $y = x + \text{ì}$. Ðïéá åßíáé ôá êïéíÜ óçìåßá óå êÜèå ðåñßðôùóç;

18. Ãéá ôéò äéÜöïñåò ôéìÝò ôïõ $\text{ì} \in \mathbb{R}$ íá ðñïóäéïñßóåôå ôï ðëÞèïò ôùí êïéíþí óçìåßùí ôçò õðåñâïëÞò $xy = -4$ êáé ôçò åõèåßáò $y + x = \text{ì}$.

19. Ãéá ðïéåò ôéìÝò ôïõ ðñáãìáôéêïý áñéèìïý ë ç åõèåßá $y = \text{ë}x + 3$ åöÜðôåôáé ôïõ êýêëïõ $x^2 + y^2 = 4$;

20. Ãéá ðïéåò ôéìÝò ôïõ ðñáãìáôéêïý áñéèìïý ê ç åõèåßá $y = 2x + \text{ê}$ ôÝìíåé ôçí ðáñáâïëÞ $y = -x^2$ óå äýï óçìåßá;

21. Äßíïíôáé ç åõèåßá ìå åîßóùóç $y = \text{ë}x + 5$ êáé ç ðáñáâïëÞ $y^2 = 3x$, üðïõ $\text{ë} \in \mathbb{R}$. Íá âñåßôå ôéò ôéìÝò ôïõ ë ãéá ôéò ïðïßåò ç ðáñáâïëÞ Ý÷åé:
á) Ýíá êïéíü óçìåßï ìå ôçí åõèåßá, **â)** äýï êïéíÜ óçìåßá ìå ôçí åõèåßá.

22. Íá âñåßôå ôéò ó÷åôéêÝò èÝóåéò ôçò åõèåßáò $x + y = ì$ êáé ôïõ êýêëïõ $x^2 + y^2 = 2$ ãéá ôéò äéÜöïñåò ôéìÝò ôïõ $ì \in \mathbb{R}$.

23. Íá âñåßôå ôç ó÷Ýóç ðïõ óõíäÝåé ôá $ë, ì \in \mathbb{R}$ þóôå ôï óýóôçìá:

$$\begin{cases} x^2 + ìx + ë^2 + 2y + ì = 0 \\ y = ëx - ì \end{cases}$$

íá åßíáé áäýíáôï.

24. Íá ëýóåôå ôá óõóôÞìáôá:

á) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 92 \\ 5(x+y) = 3xy \end{cases}$, **â)** $\begin{cases} x^3 + y^3 = 37 \\ xy(x+y) = -12 \end{cases}$, **ã)** $\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ (x+y)xy = 2 \end{cases}$,

ä) $\begin{cases} x^2 + xy = 3 \\ y^2 - xy = 2 \end{cases}$, **å)** $\begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$, **óô)** $\begin{cases} x^4 + y^4 = 97 \\ x + y = -1 \end{cases}$.

25. Íá ëýóåôå ôá óõóôÞìáôá:

á) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 22 \\ x^2 - y^2 + x - y = 18 \end{cases}$, **â)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 9x^2 - 4y^2 = 0 \end{cases}$,

ã) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + 2y = -2 \\ x^2 + y^2 + x + y = 2 \end{cases}$, **ä)** $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = -6 \end{cases}$.

26. Ç êýñéïò ÍåêôÜñéïò áãüñáóå ôåôñÜäéá êáé ðëÞñùóå 18 åõñþ. Áí ìå ôá ßäéá ÷ñÞìáôá áãüñáæå 8 ôåôñÜäéá åðéðëÝïí, èá ðëÞñùíå 0,6 åõñþ ëéãüôåñá ãéá êÜèå ôåôñÜäéï. Ðüóï êïóôßæåé êÜèå ôåôñÜäéï;

27. Äýï åñãÜôåò ÷ñåéÜæïíôáé 35 ìÝñåò ãéá íá åêôåëÝóïõí Ýíá Ýñãï ìáæß. Áí ï Ýíáò ÷ñåéÜæåôáé 24 ìÝñåò ëéãüôåñåò áðü ôïí Üëëï áí ôï Ýöôéá÷íå ìüíïò ôïõ, ðüóåò ìÝñåò ÷ñåéÜæåôáé ï êáèÝíáò ìüíïò ôïõ ãéá íá ôåëåéþóåé ôï Ýñãï;

28. Ôï Üèñïéóìá ôùí ðëåõñþí äýï ôåôñáãþíùí åßíáé 11 cm êáé ç äéáöïñÜ ôùí åìâáäþí ôïõò åßíáé 33 cm^2. Íá âñåßôå ôéò ðëåõñÝò ôùí ôåôñáãþíùí áõôþí.

29. Áí åëáôôþóïõìå ôç âÜóç åíüò ïñèïãùíßïõ êáôÜ 3 cm êáé áõîÞóïõìå ôçí Üëëç ðëåõñÜ êáôÜ 2 cm, ôï åìâáäüí ôïõ áõîÜíåôáé êáôÜ 1 cm^2. Áí üìùò áõîÞóïõìå ôç âÜóç êáôÜ 1 cm êáé áõîÞóïõìå ôçí Üëëç ðëåõñÜ êáôÜ 6 cm, ôï åìâáäüí ãßíåôáé 132 cm^2. Íá âñåßôå ôéò äéáóôÜóåéò ôïõ.

30. Íá âñåßôå ôéò ãùíßåò x, y ìå $0^ï < \hat{x}, \hat{y} < 90^ï$ ãéá ôéò ïðïßåò éó÷ýåé:

$$\begin{cases} 2óõí^2 y - 4çì x = -1 \\ \sqrt{2}óõí y + 2çì x = 2 \end{cases}$$