

4.1

Πολυώνυμα

Η έννοια του πολυωνύμου

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. **Μονώνυμο του x** ονομάζουμε κάθε παράσταση της μορφής ax^v , όπου $a \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}$ (σταθερές) και $x \in \mathbb{R}$ (μεταβλητή).

2. **Πολυώνυμο του x** ονομάζουμε κάθε παράσταση της μορφής:

$$a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

όπου $a_v, a_{v-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}$ (σταθερές) και $x \in \mathbb{R}$ (μεταβλητή).

Τα μονώνυμα $a_v x^v, a_{v-1} x^{v-1}, \dots, a_1 x, a_0$ λέγονται **όροι του πολυωνύμου** και οι αριθμοί $a_v, a_{v-1}, \dots, a_1, a_0$ λέγονται **συντελεστές του πολυωνύμου**. Επιπλέον, ο όρος a_0 λέγεται **σταθερός όρος του πολυωνύμου**.

3. Κάθε πολυώνυμο της μορφής a_0 , με $a_0 \in \mathbb{R}$, δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί, λέγεται **σταθερό πολυώνυμο**. Ειδικά το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο**.

4. Θεωρούμε το πολυώνυμο $a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_v \neq 0$,

$a_v, a_{v-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Ο φυσικός αριθμός v λέγεται **βαθμός του πολυωνύμου**. Κάθε σταθερό μη μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού. Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

5. Δύο πολυώνυμα θα λέμε ότι είναι **ίσα** αν είναι του ίδιου βαθμού και οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων είναι ίσοι, δηλαδή τα πολυώνυμα:

$$a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ και } \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$$

με $a_v \neq 0$, $\beta_\mu \neq 0$, $a_v, a_{v-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $\beta_\mu, \beta_{\mu-1}, \dots, \beta_1, \beta_0 \in \mathbb{R}$, $\mu, v \in \mathbb{N}$ και $\mu \geq v$, είναι ίσα αν ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{v-1} = \beta_{v-1}, \alpha_v = \beta_v \text{ και} \\ \beta_{v+1} &= \beta_{v+2} = \dots = \beta_{\mu-1} = \beta_\mu = 0 \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Κάθε μονώνυμο είναι και πολυώνυμο.

Αριθμητική τιμή και ρίζα πολυωνύμου

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. **Αριθμητική τιμή** ενός πολυωνύμου $P(x)$ για $x = \rho$ ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός που προκύπτει αν στο $P(x)$ θέσουμε όπου x το ρ , δηλαδή το $P(\rho)$.
2. Το ρ λέγεται **ρίζα του πολυωνύμου** $P(x)$ αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

Πράξεις με πολυώνυμα

- Η πρόσθεση (και η αφαίρεση) δύο πολυωνύμων δίνει ένα νέο πολυώνυμο, που προκύπτει κάνοντας τις προσθαφαιρέσεις στα ομοβάθμια μονώνυμα.
- Ο πολλαπλασιασμός δύο πολυωνύμων δίνει ένα νέο πολυώνυμο, που προκύπτει με τη βοήθεια της διπλής επιμεριστικής ιδιότητας.
- Η διαίρεση δύο πολυωνύμων γενικά **δεν είναι** πολυώνυμο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ο βαθμός του πολυωνύμου που προκύπτει από το άθροισμα (ή τη διαφορά) δύο πολυωνύμων είναι μικρότερος ή ίσος με το μέγιστο των βαθμών των δύο πολυωνύμων, δηλαδή:
$$\text{βαθμός}[P(x) \pm Q(x)] \leq \text{μέγιστο}\{\text{βαθμός}[P(x)], \text{βαθμός}[Q(x)]\}$$
2. Ο βαθμός του πολυωνύμου που προκύπτει από το γινόμενο δύο πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών, δηλαδή:
$$\text{βαθμός}\{P(x)Q(x)\} = \text{βαθμός}[P(x)] + \text{βαθμός}[Q(x)]$$
3. Ο βαθμός του πολυωνύμου που προκύπτει ως δύναμη είναι ίσος με το γινόμενο του εκθέτη επί τον βαθμό του πολυωνύμου, δηλαδή:
$$\text{βαθμός}[P(x)]^v = v\text{βαθμός}[P(x)], \text{ με } v \in \mathbb{N}$$

Μέθοδοι και εφαρμογές

1η ΜΕΘΟΔΟΣ: Μονώνυμα – Πολυώνυμα – Ίσα πολυώνυμα – Πράξεις πολυωνύμων

Υπόδειξη:

- *Μονώνυμο:* μορφή ax^v , $a \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}$ (σταθερές) και $x \in \mathbb{R}$ (μεταβλητή).
- *Πολυώνυμο:* μορφή $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, όπου $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}$ (σταθερές) και $x \in \mathbb{R}$ (μεταβλητή).
- *Ίσα πολυώνυμα:* ίδιος βαθμός, ίσοι ομοβάθμιοι όροι.

1. Να εξετάσετε ποιες από τις ακόλουθες παραστάσεις είναι μονώνυμα και ποιες πολυώνυμα:

Παρόμοια άσκηση
και στο σχολικό

$$P(x) = \frac{5}{3}x^4, \quad Q(x) = -2\sqrt[4]{x^7}, \quad A(x) = 4x^{-7},$$

$$B(x) = \frac{\sqrt{5}x^8}{9x^3}, \quad \Gamma(x) = -\sqrt{8x^{\frac{2}{3}}}, \quad \Delta(x) = 11x^5 - 3x^2,$$

$$E(x) = 3x^4 - \frac{5}{x^2}, \quad Z(x) = \frac{2}{7}x^4 - \frac{1}{\sqrt{3}}x^2, \quad H(x) = 2x^4 + 5x^{\frac{1}{5}}.$$

Λύση

	P(x)	Q(x)	A(x)	B(x)	Γ(x)	Δ(x)	E(x)	Z(x)	H(x)
Μονώνυμο	✓			✓					
Πολυώνυμο	✓			✓		✓		✓	

2. Να βρείτε τις τιμές των κ , λ , $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι ίσα τα πολυώνυμα $P(x) = (2\kappa - 2\lambda)x^2 + (\kappa + \lambda)x + (2\mu - 2)$ και $Q(x) = (\mu + \lambda + 1)x^2 + \mu x + 2\lambda$.

Παρόμοια άσκηση
και στο σχολικό

Λύση

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow (2\kappa - 2\lambda)x^2 + (\kappa + \lambda)x + (2\mu - 2) = (\mu + \lambda + 1)x^2 + \mu x + 2\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\kappa - 2\lambda = \mu + \lambda + 1 \\ \kappa + \lambda = \mu \\ 2\mu - 2 = 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\kappa - 3\lambda - \mu = 1 \\ \kappa + \lambda - \mu = 0 \\ 2\mu - 2\lambda = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\kappa - 3\lambda - (\lambda + 1) = 1 \\ \kappa + \lambda - (\lambda + 1) = 0 \\ \mu = \lambda + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\kappa - 4\lambda = 2 \\ \kappa = 1 \\ \mu = \lambda + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1 - 4\lambda = 2 \\ \kappa = 1 \\ \mu = \lambda + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\lambda = 0 \\ \kappa = 1 \\ \mu = \lambda + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \kappa = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}.$$

- 3.** Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 4x^2 - 2x + 1$ να παίρνει τη μορφή $P(x) = \alpha x(x - 3) + (\beta + 2)x + \gamma - 1$.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

$$\begin{aligned} &\text{Πρέπει να ισχύει } 4x^2 - 2x + 1 = \alpha x(x - 3) + (\beta + 2)x + \gamma - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 1 = \alpha x^2 + (\beta + 2 - 3\alpha)x + \gamma - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 = \alpha \text{ και } -2 = \beta + 2 - 3\alpha \text{ και } \gamma - 1 = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha = 4 \text{ και } \beta = 3\alpha - 4 \text{ και } \gamma = 2 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (4, 8, 2). \end{aligned}$$

- 4.** Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6x + 7$ και $Q(x) = x^2 + 2$. Να βρείτε τα πολυώνυμα:
 α) $P(x) + Q(x)$, β) $P(x) - 5Q(x)$,
 γ) $P(x)Q(x)$, δ) $Q^2(x) - P(x)$.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & P(x) + Q(x) = (4x^3 + 5x^2 - 6x + 7) + (x^2 + 2) = 4x^3 + 6x^2 - 6x + 9. \\ \beta) \quad & P(x) - 5Q(x) = (4x^3 + 5x^2 - 6x + 7) - 5(x^2 + 2) = 4x^3 - 6x - 3. \\ \gamma) \quad & P(x)Q(x) = (4x^3 + 5x^2 - 6x + 7)(x^2 + 2) = \\ & = 4x^5 + 8x^3 + 5x^4 + 10x^2 - 6x^3 - 12x + 7x^2 + 14 = \\ & = 4x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 17x^2 - 12x + 14. \\ \delta) \quad & Q^2(x) - P(x) = (x^2 + 2)^2 - (4x^3 + 5x^2 - 6x + 7) = \\ & = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7 = \\ & = x^4 - 4x^3 - x^2 + 6x - 3. \end{aligned}$$

2η ΜΕΘΟΔΟΣ: Βαθμός πολυωνύμου – Μηδενικό πολυώνυμο

Υπόδειξη: Βαθμός πολυωνύμου είναι ο εκθέτης του μεγαλύτερου βαθμίου όρου.

Αν οι συντελεστές του πολυωνύμου δίνονται με τη βοήθεια παραμέτρων, τότε:

- Εντοπίζουμε το x με τη μεγαλύτερη δύναμη (έστω v) και, αν $\alpha(\lambda)$ είναι ο συντελεστής του x^v , λύνουμε την $\alpha(\lambda) \neq 0$, οπότε το πολυώνυμο είναι v βαθμού.
- Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στο αρχικό πολυώνυμο καθεμία από τις τιμές του λ που εξαιρέσαμε και σε κάθε περίπτωση έχουμε ένα συγκεκριμένο πολυώνυμο του οποίου ο βαθμός βρίσκεται εύκολα.

Μηδενικό πολυώνυμο είναι το πολυώνυμο που έχει όλους τους συντελεστές του μηδέν και για το οποίο δεν ορίζεται βαθμός.

- 5.** Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^4 + (\lambda^2 + 2\lambda)x + \lambda + 2$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Για να είναι το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^4 + (\lambda^2 + 2\lambda)x + \lambda + 2$ το μηδενικό, αρκεί:

$$\begin{cases} \lambda^3 - 4\lambda = 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda = 0 \\ \lambda + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0 \\ \lambda(\lambda + 2) = 0 \\ \lambda + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -2 \\ \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = -2 \\ \lambda = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

Ένα πολυώνυμο είναι το μηδενικό όταν όλοι οι συντελεστές του είναι ταυτόχρονα ίσοι με μηδέν.

6. Για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου:

$$P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x^2 + (\lambda^2 + 1)x + 2$$

Λύση

Η μεγαλύτερη δύναμη του x που εμφανίζεται είναι η τρίτη και ο συντελεστής του x^3 είναι ο $\lambda^3 - 4\lambda$. Συνεπώς:

- Για $\lambda^3 - 4\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 4) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq \pm 2$ έχουμε ότι το πολυώνυμο είναι 3ου βαθμού.
- Για $\lambda = 0$ το πολυώνυμο γίνεται:
 $P(x) = (0^3 - 4 \cdot 0)x^3 + (0^2 - 5 \cdot 0 + 6)x^2 + (0^2 + 1)x + 2$,
 άρα $P(x) = 6x^2 + x + 2$, οπότε είναι 2ου βαθμού.
- Για $\lambda = 2$ το πολυώνυμο γίνεται $P(x) = 5x + 2$, οπότε είναι 1ου βαθμού.
- Για $\lambda = -2$ το πολυώνυμο γίνεται $P(x) = 20x^2 + 5x + 2$, οπότε είναι 2ου βαθμού.

Άρα το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $\begin{cases} 3\text{ου βαθμού αν } \lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq \pm 2 \\ 2\text{ου βαθμού αν } \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = -2 \\ 1\text{ου βαθμού αν } \lambda = 2 \end{cases}$.

3η ΜΕΘΟΔΟΣ: Αριθμητική τιμή – Ρίζα πολυωνύμου

Υπόδειξη:

- Η αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = \rho$ είναι ίση με το $P(\rho)$.
- Το ρ είναι ρίζα του $P(x)$ αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

7. Να βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x) = (\lambda^2 + 4\lambda)x^3 - (1 + \lambda)x^2 + (3\lambda + 2)x + 3$ για $x = -2$ να είναι 5.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Το πολυώνυμο $P(x)$ παίρνει την τιμή 5 για $x = -2$ όταν $P(-2) = 5$.

Τότε:

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 + 4\lambda)(-2)^3 - (1 + \lambda)(-2)^2 + (3\lambda + 2)(-2) + 3 = 5 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -8\lambda^2 - 32\lambda - 4 - 4\lambda - 6\lambda - 4 + 3 - 5 = 0 \Leftrightarrow -8\lambda^2 - 42\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 21\lambda + 5 = 0, \text{ με } \Delta = 21^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 441 - 80 = 361 \text{ και} \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{-21 \pm \sqrt{361}}{2 \cdot 4} = \frac{-21 \pm 19}{8}, \text{ άρα } \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-21+19}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} \\ \lambda_2 = \frac{-21-19}{8} = -\frac{40}{8} = -5 \end{cases}.$$

- 8.** Να εξετάσετε αν οι αριθμοί -3 και 2 είναι ρίζες του πολυώνυμου $P(x) = -3x^2 + 5x + 2$.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

- $P(-3) = -3(-3)^2 + 5(-3) + 2 = -3 \cdot 9 - 15 + 2 = -27 - 15 + 2 = -40 \neq 0$,
άρα το -3 δεν είναι ρίζα του πολυώνυμου $P(x)$.
- $P(2) = -3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 2 = -3 \cdot 4 + 10 + 2 = 0$, άρα το 2 είναι ρίζα του πολυώνυμου $P(x)$.

Το ρ είναι ρίζα του $P(x) \Leftrightarrow P(\rho) = 0$.

- 9.** Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + (1 - \kappa)x^2 + (\kappa + \lambda)x + \kappa$ έχει ρίζα το $x = 1$ και αριθμητική τιμή -33 για $x = -2$.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

$$\begin{cases} P(-2) = -33 \\ P(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2)^3 + (1-\kappa)(-2)^2 + (\kappa+\lambda)(-2) + \kappa = -33 \\ 2 + (1-\kappa) + (\kappa+\lambda) + \kappa = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -16 + 4 - 4\kappa - 2\kappa - 2\lambda + \kappa = -33 \\ 2 + 1 - \kappa + \kappa + \lambda + \kappa = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5\kappa - 2\lambda = -21 \\ \lambda + \kappa = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\kappa + 2\lambda = 21 \\ \lambda = -3 - \kappa \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\kappa + 2(-3 - \kappa) = 21 \\ \lambda = -3 - \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\kappa - 6 - 2\kappa = 21 \\ \lambda = -3 - \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\kappa = 27 \\ \lambda = -3 - \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 9 \\ \lambda = -12 \end{cases}.$$

- 10.** Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 4 , να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(1 - 3x)$ έχει ρίζα τον αριθμό -1 .

Λύση

Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 4 , θα ισχύει $P(4) = 0$.
Επίσης, $Q(-1) = P(1 - 3(-1)) = P(1 + 3) = P(4) = 0$,
οπότε το -1 είναι ρίζα του $Q(x)$.

- 11.** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο:

$$P(x) = (2\lambda^2 - 3)x^3 + 4\lambda x^2 - (\lambda - 5)x + 2.005$$

δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1 .

Λύση

$$\begin{aligned} P(1) &= (2\lambda^2 - 3) + 4\lambda - (\lambda - 5) + 2.005 = \\ &= 2\lambda^2 - 3 + 4\lambda - \lambda + 5 + 2.005 = 2\lambda^2 + 3\lambda + 2.007, \end{aligned}$$

όπου $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2.007 = -16.047 < 0$, άρα $P(1) \neq 0$.
Συνεπώς το 1 δεν μπορεί να είναι ρίζα του $P(x)$.

4η ΜΕΘΟΔΟΣ: Εύρεση πολυωνύμου

Υπόδειξη: Βρίσκουμε τον βαθμό του πολυωνύμου και το θέτουμε στη μορφή $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_n \neq 0$, όπου n είναι ο βαθμός του πολυωνύμου.

12. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$(3x - 1)P(x) = 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3$$

**Παρόμοια άσκηση
και στο σχολικό**
Λύση

Το πολυώνυμο $P(x)$ πολλαπλασιάζεται με ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού και δίνει πολυώνυμο 3ου βαθμού, άρα το $P(x)$ είναι 2ου βαθμού.

Έστω $P(x) = ax^2 + bx + \gamma$, με $a \neq 0$. Τότε:

$$(3x - 1)(ax^2 + bx + \gamma) = 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3ax^3 + 3bx^2 + 3\gamma x - ax^2 - bx - \gamma = 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3ax^3 + (3\beta - \alpha)x^2 + (3\gamma - \beta)x - \gamma = 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ 3\beta - \alpha = -13 \\ 3\gamma - \beta = 13 \\ -\gamma = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ 3\beta = \alpha - 13 \\ 3\gamma = \beta + 13 \\ \gamma = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -4 \\ 3\gamma = \beta + 13 \\ \gamma = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -4 \\ \gamma = 3 \\ \gamma = 3 \end{cases}$$

Συνεπώς $P(x) = x^2 - 4x + 3$.

Ερωτήσεις νέου τύπου

4 Να σημειώσετε Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις.

1. Κάθε μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.
2. Το άθροισμα δύο πολυωνύμων 2ου βαθμού δίνει πολυώνυμο 2ου βαθμού.
3. Το $P(x) = x^3 + 4x - 14x + 12$ έχει ρίζα το $x = 2$.
4. Το πηλίκο πολυωνύμων μπορεί να είναι πολυώνυμο.
5. Το πολυώνυμο $P(x) = \lambda x^3 + 5x^2 + 2\lambda - 3$ είναι 3ου βαθμού.



4 Να αντιστοιχίσετε τα πολυώνυμα της 1ης στήλης με τις ρίζες τους της 2ης στήλης.

	1η στήλη Πολυώνυμο P(x)	2η στήλη Ρίζες του P(x)	
		1, -1, 2	A
1	$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda$	0, 1, 2	B
2	$\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda$	0, -1, 2	Γ
3	$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$	0, 1, -2	Δ
4	$\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4$	0, -1, -2	E
5	$\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$	1, -1, -2	ΣΤ
		1, -2, 2	Z

Ασκήσεις προς λύση

4 Α΄ Ομάδα

1. Να βρείτε ποιες από τις ακόλουθες παραστάσεις είναι μονώνυμα και ποιες πολυώνυμα:

$$P(x) = -2, 4x^4,$$

$$Q(x) = -2\sqrt[4]{x^8},$$

$$A(x) = 8x^{-3},$$

$$B(x) = \frac{\sqrt{8x^2}}{2x^6},$$

$$\Gamma(x) = -3x^{-\frac{5}{2}},$$

$$\Delta(x) = 13x^4 + 5x^3 - 2,$$

$$E(x) = 6x^{-4} + 2x,$$

$$Z(x) = 5x + x^2 - 4x^5,$$

$$H(x) = 5x^3 - 3x^{\frac{12}{3}}.$$

2. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι ίσα τα πολυώνυμα:

$$P(x) = (\kappa - \lambda)x^2 + (\lambda - \kappa - \mu)x + \kappa \text{ και } Q(x) = (\kappa + 2\mu)x^2 + 3\lambda x + 4 - \lambda$$

3. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = (\alpha + \beta)x^2 + (2\beta - \gamma)x \text{ και } Q(x) = 10x^2 - (-\gamma - 2\alpha)x + 6 - \beta + \gamma$$

Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι ίσα.

4. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 4x^2 + 3x + 2$ να παίρνει τη μορφή $P(x) = \alpha x(x + 2) + \beta x + \gamma + 5$.

5. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 5x^2 - 11x + 7$ να παίρνει τη μορφή $P(x) = \alpha x(x - 3) + \beta x + 6 - \beta + \gamma$.

- 6.** Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$ και $Q(x) = 3x^2 - x + 1$. Να βρείτε τα πολυώνυμα:
- α)** $P(x) + Q(x)$, **β)** $P(x) - Q(x)$,
γ) $P(x)Q(x)$, **δ)** $4Q(x) - 5P(x)$.
- 7.** Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 5x^3 + x^2 - 2$ και $Q(x) = x^2 + 3x - 4$. Να βρείτε τα πολυώνυμα:
- α)** $3P(x) + 4Q(x)$, **β)** $2P(x) - Q(x)$,
γ) $Q^2(x)$, **δ)** $Q(P(x))$.
- 8.** Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 3\lambda)x^2 + \lambda^2 - 9$$
είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
- 9.** Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\lambda^4 - 16\lambda^2)x^4 - (\lambda^2 + 4\lambda)x^2 + \lambda^2 + 5\lambda + 4$$
είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
- 10.** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (2\alpha - 2\beta + \gamma)x^2 + (\alpha + \beta + 2\gamma)x + \gamma + \alpha - 1$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ ώστε το $P(x)$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
- 11.** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (5\alpha + 3\beta - 2\gamma)x^2 + (\alpha + 2\beta)x + 2\gamma - 3$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ ώστε το $P(x)$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
- 12.** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha - 5)x^2 + (\beta + 2)x + 200\alpha - 500\beta - 2.005$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ δεν μπορεί να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
- 13.** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^3 - 16\lambda)x^4 + (\lambda^2 - 5\lambda + 4)x^2 + (\lambda + 1)x + 2\lambda$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν το πολυώνυμο είναι 2ου βαθμού, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ .
- 14.** Για κάθε τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου:

$$P(x) = (\lambda^5 + \lambda^3 - 2\lambda)x^4 + (\lambda^2 - 5\lambda - 6)x^2 + (\lambda^2 - 1)x + 2$$
- 15.** Για κάθε τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου:

$$P(x) = (\lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda + 4)x^4 + (\lambda^2 + \lambda - 6)x^2 + (\lambda^2 - 4)x + \lambda - 2$$
- 16.** Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (2\lambda^2 - 8)x^3 + (\lambda^2 + \lambda - 6)x^2 + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x + \lambda^4 - 16, \lambda \in \mathbb{R}$$
α) Να εξετάσετε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
β) Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 17.** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x + 4$. Να βρείτε τις αριθμητικές τιμές του πολυωνύμου για:
α) $x = 1$, **β)** $x = -1$, **γ)** $x = 0$, **δ)** $x = 2$.
- 18.** Να βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου:

$$P(x) = (\lambda^2 + 8)x^3 - (5 + \lambda)x^2 + (2\lambda - 5)x - 9\lambda$$
για $x = -1$ να είναι -36 .
- 19.** Να εξετάσετε αν οι αριθμοί -3 και 2 είναι ρίζες του $P(x) = -3x^4 + 25x - 2$.
- 20.** Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $-\sqrt{3}$ και $\sqrt{5}$ είναι ρίζες του πολυωνύμου:

$$P(x) = x^4 - 5x^2 + 6$$
- 21.** Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\kappa - \lambda)x^3 - 2\kappa x^2 - (\kappa + \lambda)x + 8 - 3\lambda$$
έχει ρίζα το $x = -1$ και αριθμητική τιμή -40 για $x = 3$.
- 22.** Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό -3 , να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(7 - 2x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 5 .
- 23.** Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό -5 , να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 - 1 + P(3x - 8)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1 .
- 24.** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda)x^3 - 2\lambda x^2 + (3\lambda - \lambda^3)x + 2.005$$
δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1 .
- 25.** Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + (a + 3)x + 4$. Να βρείτε τον $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το $P(x)$ να παίρνει τη μορφή $(x + \kappa)^2(x - \lambda)$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.
- 26.** Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$(2x + 5)P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 4x + 10$$
- 27. α)** Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$(3x - 2)P(x) = 6x^3 - 22x^2 + 27x - 10$$

β) Να λύσετε την εξίσωση $6x^3 - 22x^2 + 27x - 10 = 0$.
- 28.** Να βρείτε τα $\kappa \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\kappa + 1)x^4 - (7 - \kappa)x^3 - (3\kappa + 1)x^2 + 2\kappa x + \kappa^2 - 1$$
να έχει ρίζα το $x = -1$. Στη συνέχεια να βρείτε την αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = -3$.
- 29.** Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ 2ου βαθμού, αν ισχύει:

$$P(x) + 2P(-x) = 3(x^2 + 2)$$

- 30.** Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς -4 και 2 , αν η τιμή του για $x = 1$ είναι -2 .
- 31.** Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ 3ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $1, 2$ και 3 , αν η τιμή του για $x = 0$ είναι -6 .
- 32.** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + x + 4$. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό κ , αν ισχύει $P(\kappa + 1) = 4$.

4 Β' Ομάδα

- 33.** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 1)^3 - 6x + 7$.
α) Να βρείτε τον σταθερό όρο του $P(x)$.
β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$.
- 34.** Σε ένα πολυώνυμο $P(x)$ ο σταθερός όρος είναι 5 και το άθροισμα των συντελεστών του ισούται με 4 . Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $Q(x) = P(P(x) - 4) - 5 - 5x$.
- 35.** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = ax^8 + \beta x^6 + \gamma x^4 + \delta x^2 + 7x$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Αν $P(2) = 5$, να βρείτε το $P(-2)$.
- 36.** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = ax^9 + \beta x^7 + \gamma x^5 + \delta x^3 - 11$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Αν $P(-4) = 9$, να βρείτε το $P(4)$.
- 37.** Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{\alpha}{x - 1} + \frac{\beta}{x + 1}$ για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq -1$.
- 38.** Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $\frac{2x - 1}{x^2 - x - 6} = \frac{\alpha}{3 - x} - \frac{\beta}{x + 2}$ για κάθε $x \neq 3$ και $x \neq -2$.
- 39.** Αν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\gamma - \alpha)x^2 + (\beta - \gamma)x + (\alpha - \beta)$$
είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
- 40.** Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ 2ου βαθμού, αν ισχύουν:
 $P(1 - x) = P(x + 1), P(0) = 1$ και $P(1) = -3$
- 41.** Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (x - 1)^{2005}$ και $Q(x) = x^{2005} - 1$. Να εξετάσετε αν τα πολυώνυμα είναι ίσα.
- 42.** Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $2P(x) + 3P(1 - x) = x$.

- 43.** Να βρείτε πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ 1ου βαθμού για τα οποία ισχύει:
 $(x - 2)^2 P(x) - (x^2 - 3x + 2)Q(x) = -6x^3 + 6x^2 + 28x - 32$
- 44.** Να βρείτε το πολυώνυμο 2ου βαθμού $P(x)$ και το πολυώνυμο 1ου βαθμού $Q(x)$ ώστε να ισχύει $(x^2 - 1)P(x) + x^3 Q(x) = x^3 + 1$.
- 45.** Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:
 $2P(x - 1) + 3P(-x) = 2x + 3$
- 46.** Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ 1ου βαθμού ώστε:
 $P(P(x)) - P(x) = 6x + 12$
- 47.** Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ ώστε $[P(x)]^2 = x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 3x - 4$.
- 48.** Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$, αν ισχύει $[P(x)]^2 + P(x) = (x + 1)(x + 2)$.
- 49.** Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $P(x - 3) = 4x + 5$.
- 50.** Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $P(x + 2) = 3x - 1$.
- 51.** Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ για τα οποία ισχύει $3[P(x)]^2 = 2P(x)$.
- 52.** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ για το οποίο ισχύει:
 $P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = 0$, με $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$
 Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
- 53.** Να βρείτε τους $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο:
 $P(x) = (\alpha + 2 - \gamma)x^3 - (\beta + 5)x^2 + (3\beta + 5\gamma)x + 5\alpha + 8\delta - 9$
 να έχει περισσότερες από 3 ρίζες.
- 54.** Δίνονται τα πολυώνυμα:
 $P(x) = ax^3 - \beta x^2 + \gamma x + \delta$ και $Q(x) = (4\alpha - 5)x^3 - (\beta^2 + 2)x^2 + (\beta - \gamma)x + 6$
 Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ για τα οποία το $f(x) = P(x) - Q(x)$ είναι:
α) 3ου βαθμού, **β)** 2ου βαθμού,
γ) 1ου βαθμού, **δ)** το μηδενικό πολυώνυμο.
- 55.** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{(\alpha - 1)x^2 + (\alpha - 3\beta - 1)x + \gamma + 3}{x^2 + x + 1}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το $A(1, 2)$. Να βρείτε τους α, β, γ ώστε η συνάρτηση f να είναι σταθερή.

56. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = x^2 - (2\alpha + 1)x + \alpha^2 + \alpha, \quad Q(x) = (x - \alpha - 1)^{2\nu} + (x - \alpha)^\nu - 1, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{N}^*$$

Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$ είναι και ρίζες του $Q(x)$.

57. Αν τα πολυώνυμα $f(x)$, $g(x)$ δεν έχουν κοινή ρίζα, να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα $f(x) + g(x)$ και $f(x)g(x)$ δε θα έχουν επίσης κοινή ρίζα.

58. Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$ για τα οποία ισχύει:

$$f^2(x) - xg^2(x) - xp^2(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα $f(x)$, $g(x)$ και $p(x)$ είναι μηδενικά.

59. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x) = P(P(x))$. Αν το ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(x) = P(x) - x$, να αποδείξετε ότι το ρ είναι και ρίζα του πολυωνύμου $g(x) = Q(x) - x$.

60. Αν $f(x)$, $g(x)$ είναι δύο πολυώνυμα χωρίς ρίζες, να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα $P(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, $Q(x) = \beta f(x) + \alpha g(x)$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ και $|\alpha| \neq |\beta|$, δεν έχουν κοινή ρίζα.

61. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)$, $Q(x)$, με $Q(x) = P(x)P(-x)$. Να αποδείξετε ότι το $Q(x)$ έχει μόνο άρτιες δυνάμεις του x .

62. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)$, $Q(x) = P(P(P(x)))$, με $P(\alpha) = \beta$, $P(\beta) = \gamma$ και $P(\gamma) = \alpha$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) Q(\alpha) = \alpha, \quad \beta) Q(\beta) = \beta, \quad \gamma) Q(\gamma) = \gamma.$$

63. α) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \neq 0$ και $x \neq 1$ να ισχύει:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1}$$

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{\nu(\nu+1)}$.

64. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 5(\gamma - \alpha)x^3 + \alpha(3\gamma^2 - \beta^2)x - 7(\beta - \alpha) + 2$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Αν οι α, β, γ είναι οι πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 120^\circ$, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ είναι το σταθερό πολυώνυμο.

4.2

Διαίρεση πολυωνύμων

Αλγοριθμική διαίρεση

ΘΕΩΡΗΜΑ

(Ταυτότητα της διαίρεσης)

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ τέτοια ώστε:

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$$

όπου ο βαθμός του $\upsilon(x)$ είναι μικρότερος του βαθμού του $\delta(x)$ ή $\upsilon(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Το $\Delta(x)$ λέγεται **διαιρετέος**, το $\delta(x)$ λέγεται **διαιρέτης**, το $\pi(x)$ **πηλίκιο** και το $\upsilon(x)$ **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν σε μια διαίρεση πολυωνύμων το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ είναι 0, τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην τέλεια διαίρεση του $\Delta(x)$ με το $\delta(x)$ λέμε ότι το **$\delta(x)$ διαιρεί το $\Delta(x)$** ή το $\Delta(x)$ **διαιρείται με το $\delta(x)$** ή το $\delta(x)$ **είναι παράγοντας του $\Delta(x)$** ή το $\delta(x)$ **είναι διαιρέτης του $\Delta(x)$** .

Παράδειγμα διαίρεσης πολυωνύμων

Έστω ότι έχουμε τη διαίρεση των πολυωνύμων $\Delta(x) = -3x^5 + 7x^4 - 6x^3 + 9x^2 + x - 1$ και $\delta(x) = x^2 - 5$. Τότε:

$$\begin{array}{r|l} -3x^5 + 7x^4 - 6x^3 + 9x^2 + x - 1 & x^2 - 5 \\ \hline & \end{array}$$

$$-3x^3$$

$$\begin{array}{r|l} -3x^5 + 7x^4 - 6x^3 + 9x^2 + x - 1 & x^2 - 5 \\ \hline & \end{array}$$

$$+ 3x^5 + 0x^4 - 15x^3$$

$$-3x^3$$

Πρώτα βρίσκουμε το μονώνυμο που, όταν πολλαπλασιάζεται με τον μεγαλύτερο όρο του διαιρέτη, δίνει τον μεγαλύτερο όρο του διαιρετέου, το οποίο γράφεται στο πηλίκιο.

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο αυτό με τον διαιρετέο, και το γινόμενο γράφεται κάτω από τον διαιρετέο με αντίθετα πρόσημα. Αν κάποιος όρος δεν υπάρχει, τον βάζουμε με συντελεστή μηδέν.

$$\begin{array}{r|l} -3x^5 + 7x^4 - 6x^3 + 9x^2 + x - 1 & x^2 - 5 \\ + 3x^5 + 0x^4 - 15x^3 & \\ \hline & -3x^3 \\ & 7x^4 - 21x^3 + 9x^2 + x - 1 \end{array}$$

Έπειτα προσθέτουμε τα δύο πολυώνυμα και προκύπτει ένα τρίτο πολυώνυμο, που γράφεται κάτω από αυτά.

$$\begin{array}{r|l} -3x^5 + 7x^4 - 6x^3 + 9x^2 + x - 1 & x^2 - 5 \\ + 3x^5 + 0x^4 - 15x^3 & \\ \hline & -3x^3 + 7x^2 \\ & 7x^4 - 21x^3 + 9x^2 + x - 1 \\ & -7x^4 + 0x^3 + 35x^2 \\ \hline & -21x^3 + 44x^2 + x - 1 \end{array}$$

Μετά εφαρμόζουμε διαδοχικά την ίδια διαδικασία, ώσπου να καταλήξουμε σε πολυώνυμο του οποίου ο βαθμός να είναι μικρότερος του βαθμού του διαιρέτη.

$$\begin{array}{r|l} -3x^5 + 7x^4 - 6x^3 + 9x^2 + x - 1 & x^2 - 5 \\ + 3x^5 + 0x^4 - 15x^3 & \\ \hline & -3x^3 + 7x^2 - 21x \\ & 7x^4 - 21x^3 + 9x^2 + x - 1 \\ & -7x^4 + 0x^3 + 35x^2 \\ \hline & -21x^3 + 44x^2 + x - 1 \\ & + 21x^3 + 0x^2 - 105x \\ \hline & 44x^2 - 104x - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -3x^5 + 7x^4 - 6x^3 + 9x^2 + x - 1 & x^2 - 5 \\ + 3x^5 + 0x^4 - 15x^3 & \\ \hline & -3x^3 + 7x^2 - 21x + 44 \\ & 7x^4 - 21x^3 + 9x^2 + x - 1 \\ & -7x^4 + 0x^3 + 35x^2 \\ \hline & -21x^3 + 44x^2 + x - 1 \\ & + 21x^3 + 0x^2 - 105x \\ \hline & 44x^2 - 104x - 1 \\ & -44x^2 + 0x + 220 \\ \hline & -104x + 219 \end{array}$$

Άρα από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε:

$$-3x^5 + 7x^4 - 6x^3 + 9x^2 + x - 1 = (x^2 - 5)(-3x^3 + 7x^2 - 21x + 44) + (-104x + 219),$$

με πηλίκο το $\pi(x) = -3x^3 + 7x^2 - 21x + 44$ και υπόλοιπο το $\upsilon(x) = -104x + 219$.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Αν το πολυώνυμο που εκφράζει τον διαιρετέο μιας διαίρεσης δύο πολυωνύμων είναι **ελλιπές** (δηλαδή δεν υπάρχουν με φθίνουσα σειρά όλες οι δυνάμεις του x), τότε, για να κάνουμε τη διαίρεση, συμπληρώνουμε εμείς τους όρους που λείπουν βάζοντας ως συντελεστές τους μηδενικά.

► ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν $\Delta(x) = 4x^3 + 5x - 3$, τότε γράφουμε $\Delta(x) = 4x^3 + 0x^2 + 5x - 3$.

Διαίρεση πολυωνύμου με το $x - \rho$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$, ισχύει δηλαδή $v = P(\rho)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

Σχήμα Horner

Όταν θέλουμε είτε να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $\Delta(x) : (x - \rho)$ είτε να εξετάσουμε αν το ρ είναι ρίζα του $\Delta(x)$, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτό που ονομάζουμε **σχήμα Horner**. Το σχήμα Horner αποτελείται από τρεις γραμμές αριθμών και την κατασκευή του θα την περιγράψουμε παρακάτω.

Έστω λοιπόν η διαίρεση $(5x^3 + 4x^2 - 7x - 9) : (x + 1)$.

Τότε, για να εφαρμόσουμε το σχήμα Horner, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & -7 & -9 & -1 \\ \hline \end{array}$$

Γράφουμε πρώτα όλους τους συντελεστές του διαιρετέου κατά τη φθίνουσα σειρά των δυνάμεων στο αριστερό μέρος της διάταξης και το ρ στο δεξί μέρος της διάταξης.

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & -7 & -9 & -1 \\ \hline \downarrow & & & & \\ 5 & & & & \end{array}$$

Καταρχήν κατεβάζουμε κάτω από τη γραμμή τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου.

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & -7 & -9 & -1 \\ \hline \downarrow & \nearrow -5 & & & \\ 5 & & & & \end{array}$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε το νούμερο κάτω από τη γραμμή με το ρ και το αποτέλεσμα το γράφουμε στην προηγούμενη γραμμή, στην αμέσως δεξιότερη θέση.