ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ 1

1. **Η έννοια του διανύσματος**
2. **Πρόσθεση & αφαίρεση διανυσμάτων**
3. **Βαθμωτός πολλαπλασιασμός**
4. **Συντεταγμένες**
5. **Εσωτερικό γινόμενο**

β Παραλληλία διανυσμάτων

Από μία σχέση $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ με $\lambda \in R$ **συμπεραίνουμε ότι** $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$

Δηλαδή, **αν για τα διανύσματα** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

αποδείξουμε ότι **το ένα εξ αυτών γράφεται ως γινόμενο ενός αριθμού επί το άλλο διάνυσμα, τότε αυτά θα είναι παράλληλα**.

Δηλαδή, αν φτάσουμε σε μία σχέση της μορφής $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\lambda \in R$, τότε $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

Παράδειγμα **1**

Αν είναι $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{\Delta M} = 2\overrightarrow{\Gamma M} + \overrightarrow{BM}$

τότε είναι $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{\Gamma M} + 2\overrightarrow{M\Delta}$ ή $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

Οπότε, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι **παράλληλα**.

Αν $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$, **θα υπάρχει** $\lambda \in R$, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, **με την προϋπόθεση ότι** $\vec{\beta} \neq \vec{0}$

Ας εξηγήσουμε γιατί στο θεώρημα είναι αναγκαίο να είναι $\vec{\beta} \neq \vec{0}$

Κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ θεωρείται παράλληλο στο μηδενικό διάνυσμα $\vec{\beta} = \vec{0}$

Όμως δε γίνεται να γράψουμε το $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ ως $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta} = \lambda\vec{0} = \vec{0}$ **Άτοπο**

Ας προσέξουμε πρώτα την πιο κάτω βοηθητική πρόταση.

Έστω τα μη παράλληλα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

Αν $\kappa\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, **όπου** κ, λ **πραγματικοί**, **τότε υποχρεωτικά θα είναι** $\kappa = \lambda = 0$

Πραγματικά

Αν ήταν $\kappa \neq 0$, από $\kappa\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, θα ήταν και $\vec{\alpha} = \frac{\lambda}{\kappa}\vec{\beta}$, δηλαδή $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ **Άτοπο**

Αν ήταν $\lambda \neq 0$, από $\kappa\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, θα ήταν και $\vec{\beta} = \frac{\kappa}{\lambda}\vec{\alpha}$, δηλαδή $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ **Άτοπο**

Οπότε $\kappa = \lambda = 0$

Παράδειγμα 2

Έστω τα μη παράλληλα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

Θα δείξουμε ότι τα διανύσματα $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.

Πραγματικά

Αν τα διανύσματα $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ ήταν παράλληλα

επειδή το $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι **μη μηδενικό**, αφού αν $\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$, άρα $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$

Άτοπο

θα υπήρχε $\lambda \in R$

ώστε $\vec{v} = \lambda \vec{u} \Leftrightarrow \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow (\lambda + 1)\vec{\beta} = (\lambda - 1)\vec{\alpha}$

Σύμφωνα με το κριτήριο που είδαμε, πρέπει $\lambda - 1 = 0$ ή $\lambda = 1$

και $\lambda + 1 = 0$ $\quad 2 \cancel{=} 0$ **Άτοπο**

Οπότε, τα διανύσματα $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ **δεν** είναι **παράλληλα**.

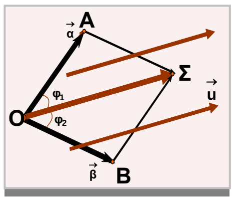
Να παρατηρήσουμε ότι ένα διάνυσμα κινούμενο ομόρροπα προς τον εαυτό του δημιουργεί ίσα διανύσματα
και συνεπώς δεν υφίσταται η έννοια του σταθερού διανύσματος.
Να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν μόνο διανύσματα με σταθερό μέτρο.

Παράδειγμα 3

Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία

ο φορέας του $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι παράλληλος στη διχοτόμο

της γωνίας των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, αφού το ΟΑΣΒ είναι ρόμβος.



Ας προσέξουμε τα πιο κάτω θέματα:

Θέμα 1

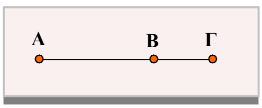
Αν $3\overrightarrow{OA} - 8\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0}$, θα αποδείξουμε ότι $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{B\Gamma}$

Απάντηση

$$3\overrightarrow{OA} - 8\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} - 5\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}\right) - 5\left(\overrightarrow{\Gamma O} + \overrightarrow{OB}\right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BA} - 5\overrightarrow{\Gamma B} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$$



Οπότε, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι **συγγραμμικά**.

Θέμα 6

Έστω τα μη μηδενικά

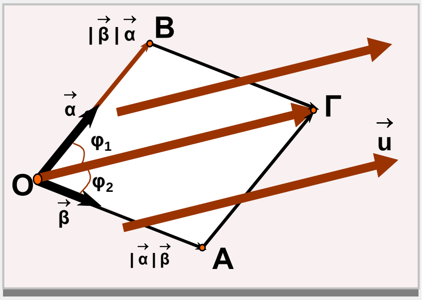
και **μη συγγραμμικά** διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

Θα αποδείξουμε ότι ο **φορέας**

του διανύσματος $\vec{u} = |\vec{\beta}|\vec{\alpha} + |\vec{\alpha}|\vec{\beta}$

είναι **παράλληλος** στη **διχοτόμο**

της **γωνίας** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$



Απάντηση

Έστω ω η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, φ_1 η γωνία των $\vec{u}$, $\vec{\alpha}$, φ_2 η γωνία των $\vec{u}$, $\vec{\beta}$

Από $\vec{u} = |\vec{\beta}|\vec{\alpha} + |\vec{\alpha}|\vec{\beta}$

πολλαπλασιάζοντας με $\vec{\alpha}$ είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{u} = |\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\alpha}|\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$

$$\text{ή } |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{u}|\,\text{συν}\varphi_1 = |\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\alpha}|^2\cdot|\vec{\beta}|\,\text{συν}\omega$$

$$\text{ή } |\vec{u}|\cdot\text{συν}\varphi_1 = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|(1+\text{συν}\omega)$$

$$\text{ή } \textbf{συν}\varphi_1 = \frac{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}{|\vec{u}|}(1+\textbf{συν}\omega)$$

Όμοια, καταλήγουμε ότι $\textbf{συν}\varphi_2 = \dfrac{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}{|\vec{u}|}(1+\textbf{συν}\omega)$

Οπότε $\textbf{συν}\varphi_1 = \textbf{συν}\varphi_2$ και άρα $\varphi_1 = \varphi_2$

Οπότε, ο φορέας του $\vec{u}$ είναι παράλληλος στη διχοτόμο της γωνίας των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

Προσοχή, είναι λάθος να πούμε ότι ο φορέας του $\vec{u}$ είναι διχοτόμος της γωνίας των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, **αφού ένα διάνυσμα «κινείται στο επίπεδο» .**

Θα μπορούσαμε να λύσουμε το θέμα και ως εξής:

Επειδή $\left||\vec{\beta}|\vec{\alpha}\right| = |\vec{\beta}||\vec{\alpha}|$ και $\left||\vec{\alpha}|\vec{\beta}\right| = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$

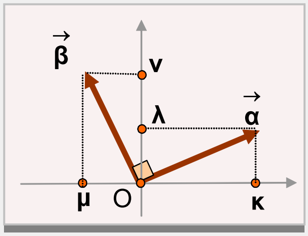
το **παραλληλόγραμμο** είναι και **ρόμβος**, οπότε είναι προφανές ότι $\varphi_1 = \varphi_2$

Θέμα 7

Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\kappa, \lambda)$ και $\vec{\beta} = (\mu, \nu)$

είναι **κάθετα** και έχουν **μέτρα** ίσα με τη **μονάδα**.

Θα αποδείξουμε ότι $(\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = 1$



Απάντηση

Μπορούμε να λύσουμε το θέμα ως εξής:

Επειδή $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, έχουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow (\kappa, \lambda)(\mu, \nu) = 0 \Leftrightarrow \kappa\mu + \lambda\nu = 0$

Επειδή τα μέτρα των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίσα με τη μονάδα

είναι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} = 1$ ή $\kappa^2 + \lambda^2 = 1$ και $|\vec{\beta}| = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} = 1$ ή $\mu^2 + \nu^2 = 1$

Από την ταυτότητα **Lagrange** είναι $(\kappa^2 + \lambda^2)(\mu^2 + \nu^2) - (\kappa\mu + \lambda\nu)^2 = (\kappa\nu - \lambda\mu)^2$

θα έχουμε $1 \cdot 1 - 0 = (\kappa\nu - \lambda\mu)^2 \Leftrightarrow (\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = 1$

Θα μπορούσαμε να λύσουμε το θέμα και ως εξής:

$$(\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = \left((\kappa, \lambda) \cdot (\nu, -\mu)\right)^2 = \left(\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} \cdot \sqrt{\nu^2 + \mu^2} \cdot \sigma\upsilon\nu\omega\right)^2 = \sigma\upsilon\nu^2\omega$$

όπου ω είναι η γωνία των διανυσμάτων (κ, λ) και $(\nu, -\mu)$

Όμως τα διανύσματα (κ, λ) και $(\nu, -\mu)$ είναι παράλληλα

αφού $\begin{vmatrix} \kappa & \lambda \\ \nu & -\mu \end{vmatrix} = -\kappa\mu - \lambda\nu = -(\kappa\mu + \lambda\nu) = 0$ και άρα $\sigma\upsilon\nu\omega = \pm 1$, αφού $\omega = 0$ ή $\omega = \pi$

Επομένως $\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ και έτσι θα έχουμε $(\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = 1$

Θα μπορούσαμε να λύσουμε το θέμα και ως εξής:

Αφού τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\kappa, \lambda)$ και $\vec{\beta} = (\mu, \nu)$ είναι **κάθετα** και **μοναδιαία**

αν τα τοποθετήσουμε σε σύστημα αξόνων, πρέπει $\kappa = \nu$ και $\lambda = -\mu$

Οπότε $(\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = (\kappa^2 + \lambda^2)^2 = \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}^{\,4} = 1$

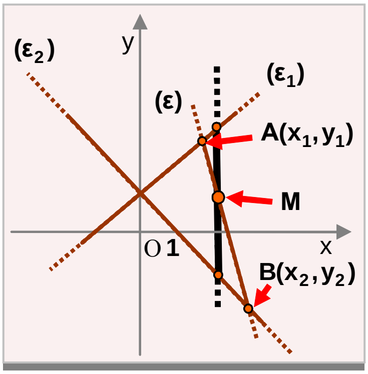
Γραμμές 2

1. Ευθεία
2. Κύκλος
3. Παραβολή
4. Έλλειψη
5. Υπερβολή
6. Κωνικές τομές

Θέμα 7

Θα **βρούμε** την εξίσωση της ευθείας (ε) που **διέρχεται** από το σημείο $M(2,1)$ και τέμνει τις ευθείες $(\varepsilon_1): y = x+1$ και $(\varepsilon_2): y = -x+1$ στα σημεία A και B αντιστοίχως, ώστε το M να είναι **μέσο** του AB

Απάντηση



Ας δούμε πρώτα τον πιο κάτω τρόπο.

Έστω ότι η ευθεία (ε) που διέρχεται από το M τέμνει την (ε_1) στο $A(x_1, y_1)$ και την (ε_2) στο $B(x_2, y_2)$

Επειδή το $M(2,1)$ είναι το **μέσο** του AB, είναι $\dfrac{x_1+x_2}{2}=2$ και $\dfrac{y_1+y_2}{2}=1$

Επίσης, επειδή το $A(x_1, y_1)$ είναι και σημείο της (ε_1), είναι $(\varepsilon_1): y_1 = x_1+1$

επειδή το $B(x_2, y_2)$ είναι και σημείο της (ε_2), είναι $(\varepsilon_2): y_2 = -x_2+1$

Θα λύσουμε τώρα το σύστημα

$$\frac{x_1+x_2}{2}=2$$
$$\frac{y_1+y_2}{2}=1 \Leftrightarrow \frac{x_1+1-x_2+1}{2}=1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$
$$y_1 = x_1+1$$
$$y_2 = -x_2+1$$

Οπότε, η σχέση $\dfrac{x_1+x_2}{2}=2$ δίνει $x_1 = 2$ και έτσι είναι και $x_2 = 2$

Οπότε $y_1 = 3$ και $y_2 = -1$

Οπότε, πρόκειται για τα σημεία $A(2,3)$ και $B(2,-1)$

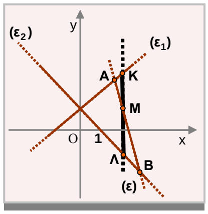
Συνεπώς, η ευθεία του προβλήματος είναι προφανώς η ευθεία $(\varepsilon): x = 2$

Όμως μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το θέμα και κλασικά όπως παρακάτω.

Να τονίσουμε πρώτα κάτι σημαντικό !
Όταν ψάχνουμε ευθεία και δεν ξέρουμε την κλίση της, πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις, αν είναι **κατακόρυφη** ή αν **δεν** είναι **κατακόρυφη** και έχει κλίση $\boldsymbol{\lambda}$

Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $M(2,1)$
είναι η κατακόρυφη $x = 2$
και οι μη κατακόρυφες ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_\lambda): y-1=\lambda(x-2)$, $\lambda \in R$

• Η ευθεία $\mathbf{x = 2}$ τέμνει την $(\varepsilon_1): y = x+1$ στο σημείο $K(2,3)$
και την $(\varepsilon_2): y = -x+1$ στο σημείο $\Lambda(2,-1)$



Το $\mathbf{K\Lambda}$ έχει **μέσο** το σημείο $M\left(\frac{2+2}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) \equiv M(2,1)$

Άρα, η κατακόρυφη $\mathbf{x = 2}$ είναι μια από τις ζητούμενες ευθείες.

• Η ευθεία $(\varepsilon_\lambda): y-1=\lambda(x-2)$, $\lambda \in R$, τέμνει τις $(\varepsilon_1): y = x+1$, $(\varepsilon_2): y = -x+1$

στα σημεία $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ αντιστοίχως, που οι συντεταγμένες τους
είναι οι λύσεις των συστημάτων: $(\Sigma_1): \begin{cases} y = x+1 \\ y-1=\lambda(x-2) \end{cases}$ και $(\Sigma_2): \begin{cases} y = -x+1 \\ y-1=\lambda(x-2) \end{cases}$

Από το πρώτο σύστημα έχουμε $x+1-1=\lambda x-2\lambda \Leftrightarrow (\lambda-1)x = 2\lambda \Leftrightarrow x = \frac{2\lambda}{\lambda-1}$

οπότε $y = x+1 = \frac{2\lambda}{\lambda-1}+1 = \frac{3\lambda-1}{\lambda-1}$ και τελικά συμπεραίνουμε ότι $A\left(\frac{2\lambda}{\lambda-1}, \frac{3\lambda-1}{\lambda-1}\right)$

Προφανώς είναι $\lambda \neq 1$

αφού, για $\lambda = 1$, πρόκειται για την ευθεία $y = x-1$, η οποία ταυτίζεται με την (ε_1)

Ομοίως, λύνοντας το δεύτερο σύστημα, καταλήγουμε ότι $B\left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}, \frac{1-\lambda}{\lambda+1}\right)$

Επειδή το $M(2,1)$ είναι μέσο του $\mathbf{AB}$, είναι

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{2\lambda}{\lambda-1}+\frac{2\lambda}{\lambda+1}\right) = 2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3\lambda-1}{\lambda-1}+\frac{1-\lambda}{\lambda+1}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4\lambda^2}{\lambda^2-1} = 4 \\ \frac{3\lambda^2+2\lambda-1-\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda^2-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 = \lambda^2-1 \\ \text{και} \\ 2\lambda^2+4\lambda-2 = 2\lambda^2-2 \end{cases}$$

το οποίο προφανώς είναι αδύνατο.

Η **μόνη λύση** του προβλήματός μας είναι η κατακόρυφη ευθεία $\mathbf{x = 2}$

β Εξίσωση ευθείας

Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $(\varepsilon): Ax + By + \Gamma = 0$ είναι εξίσωση ευθείας, αρκεί να αποδείξουμε ότι οι A, B δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν.

Δηλαδή αρκεί να αποδείξουμε ότι $|A| + |B| \neq 0$

Παράδειγμα **1**

Έστω η εξίσωση $(\varepsilon): (\mu - 1)x + \mu y + \mu^2 = 0$

Θα αποδείξουμε ότι παριστάνει ευθεία, για κάθε πραγματική τιμή του μ

Πραγματικά

Η εξίσωση είναι της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A = \mu - 1$ και $B = \mu$

Επειδή οι συντελεστές $\mu - 1$ και μ, των x και y αντίστοιχα δε μηδενίζονται συγχρόνως για καμία τιμή του μ, η δοθείσα εξίσωση παριστάνει για κάθε $\mu \in R$ μία ευθεία γραμμή.

Παράδειγμα **2**

Έστω η εξίσωση $(\varepsilon): (x - 2y + 5) + \lambda(3x + 2y + 7) = 0$, όπου $\lambda \in R$

Θα αποδείξουμε ότι, για κάθε τιμή του λ, αυτή παριστάνει ευθεία.

Πραγματικά

Η εξίσωση $\quad (\varepsilon): (x - 2y + 5) + \lambda(3x + 2y + 7) = 0$

γράφεται ισοδύναμα $\quad x - 2y + 5 + 3\lambda x + 2\lambda y + 7\lambda = 0$

$$\Leftrightarrow (\varepsilon): (1 + 3\lambda)x + (-2 + 2\lambda)y + (5 + 7\lambda) = 0$$

Η εξίσωση είναι της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A = 1 + 3\lambda$ και $B = -2 + 2\lambda$

Αν ήταν $A = 0 \Leftrightarrow 1 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$

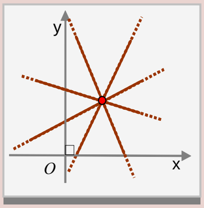
και $B = 0 \quad -2 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ **Άτοπο**

Οπότε, **δεν υπάρχει** τιμή του λ

που να μηδενίζεται συγχρόνως και ο συντελεστής του x και ο συντελεστής του y

Οπότε, η εξίσωση παριστάνει εξίσωση ευθείας για κάθε τιμή του $\lambda \in R$

Ένα κλασικό θέμα είναι
το θέμα σχετικά με το να αποδείξουμε
ότι οι ευθείας μιας οικογένειας ευθειών
διέρχονται από σταθερό σημείο
δηλαδή αποτελούν όπως λέμε μία δέσμη ευθειών.



Παράδειγμα **3**

Έστω η εξίσωση $(\varepsilon_\lambda): (\lambda+1)x + (\lambda-2)y + (1-2\lambda) = 0$

Θα αποδείξουμε ότι αυτή αποτελεί εξίσωση ευθείας
και ότι όλες οι ευθείες που παράγονται διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Πραγματικά

Έστω ότι $\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$

και $\lambda-2=0 \dashrightarrow -1=0$ **Άτοπο**

Οπότε, η πιο πάνω εξίσωση είναι μία οικογένεια ευθειών, για κάθε $\lambda \in R$

Ας δούμε πώς θα αποδείξουμε ότι αυτές διέρχονται από σταθερό σημείο.

Μπορούσαμε όμως να κινηθούμε ως εξής:

Για να δείξουμε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το ίδιο σημείο, αρκεί να βρούμε ένα σημείο $\Sigma(x_o, y_o)$ **του οποίου οι συντεταγμένες να επαληθεύουν την αρχική εξίσωση για όλες τις τιμές του** λ

Ας θεωρήσουμε δύο συγκεκριμένες απ’ αυτές.

Για $\lambda=0$ προκύπτει η ευθεία $(\varepsilon_1): x-2y+1=0$

Για $\lambda=1$ προκύπτει η ευθεία $(\varepsilon_2): 2x-y-1=0$

Λύνοντας το σύστημα αυτών, βρίσκουμε απλά ότι $x=1$ και $y=1$

Δηλαδή οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $\Sigma(1,1)$

Οπότε, αν όλες διέρχονται από σταθερό σημείο, αυτό θα είναι το σημείο Σ

Ας το αποδείξουμε.

Η εξίσωση $(\varepsilon_\lambda): (\lambda+1)x + (\lambda-2)y + (1-2\lambda) = 0$

για $x=1$ και $y=1$ γίνεται $(\lambda+1)\cdot 1 + (\lambda-2)\cdot 1 + (1-2\lambda) = 0 \Leftrightarrow 0=0$

Δηλαδή οι συντεταγμένες του Σ ικανοποιούν την (ε_λ)

Οπότε, όλες οι ευθείες (ε_λ) **διέρχονται από το σταθερό σημείο** Σ

Θα μπορούσαμε όμως να κινηθούμε και ως εξής:

Η εξίσωση $(\varepsilon_\lambda): (\lambda+1)x+(\lambda-2)y+(1-2\lambda)=0$

γίνεται $(\varepsilon_\lambda): \lambda x+x+\lambda y-2y+1-2\lambda=0$

ή $(x+y-2)\lambda+(x-2y+1)=0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

Οπότε, πρέπει $x+y-2=0$ και $x-2y-1=0$

Λύνοντας το πιο πάνω σύστημα, βρίσκουμε απλά ότι $x=1$ και $y=1$

Δηλαδή οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $\Sigma(1,1)$

Οπότε, όλες διέρχονται από **σταθερό σημείο**, το σημείο Σ

Θα μπορούσαμε όμως να κινηθούμε και όπως πιο κάτω:

Έστω η εξίσωση $(\varepsilon_\lambda): (\lambda+1)x+(\lambda-2)y+(1-2\lambda)=0$

Θεωρούμε δύο τυχούσες απ' αυτές, τις $(\varepsilon_1): (\lambda_1+1)x+(\lambda_1-2)y+(1-2\lambda_1)=0$

και $(\varepsilon_2): (\lambda_2+1)x+(\lambda_2-2)y+(1-2\lambda_2)=0$

που υποθέτουμε ότι είναι διαφορετικές, δηλαδή ότι $\lambda_1\neq\lambda_2$

Θα λύσουμε το σύστημά τους.

Είναι $(\Sigma): \begin{cases}(\lambda_1+1)x+(\lambda_1-2)y=2\lambda_1-1\\(\lambda_2+1)x+(\lambda_2-2)y=2\lambda_2-1\end{cases}$

Είναι $D=\begin{vmatrix}\lambda_1+1 & \lambda_1-2\\ \lambda_2+1 & \lambda_2-2\end{vmatrix}=(\lambda_1+1)(\lambda_2-2)-(\lambda_2+1)(\lambda_1-2)$

$$=(\lambda_1\lambda_2-2\lambda_1+\lambda_2-2)-(\lambda_1\lambda_2-2\lambda_2+\lambda_1-2)$$

$$=3(\lambda_2-\lambda_1)\neq0$$

Επίσης, πολύ απλά, διαπιστώνουμε ότι $D_x=\begin{vmatrix}2\lambda_1-1 & \lambda_1-2\\ 2\lambda_2-1 & \lambda_2-2\end{vmatrix}=3(\lambda_2-\lambda_1)$

και $D_y=\begin{vmatrix}\lambda_1+1 & 2\lambda_1-1\\ \lambda_2+1 & 2\lambda_2-1\end{vmatrix}=3(\lambda_2-\lambda_1)$

Συνεπώς, το σύστημα δέχεται **μοναδική λύση** τη $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=(1,1)$

Επειδή οι τυχούσες ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ **τέμνονται στο** $\Sigma(1,1)$

συμπεραίνουμε ότι και όλες οι ευθείες (ε_λ) **διέρχονται από το σημείο** $\Sigma(1,1)$

Επίσης ένα κλασικό θέμα είναι το θέμα σχετικά με το να εξετάσουμε αν κάποια ευθεία, είναι τελικά ευθεία μιας δέσμης ευθειών.

Όπως είδαμε πριν, η εξίσωση $(\varepsilon_\lambda):(\lambda+1)x+(\lambda-2)y+(1-2\lambda)=0$

αποτελεί μία **δέσμη ευθειών**, δηλαδή ευθείες που **διέρχονται** από το **ίδιο σημείο** και μάλιστα το σημείο $\Sigma(1,1)$

Παράδειγμα 4

Θα εξετάσουμε αν η ευθεία $(\delta):4x+y-3=0$ είναι ευθεία της οικογένειας $(\varepsilon_\lambda):(\lambda+1)x+(\lambda-2)y+(1-2\lambda)=0$

Πραγματικά

Επειδή για $x=1$ και $y=1$, αυτή δίνει $4+1-3=2\neq 0$

αυτή **δε διέρχεται** από το Σ και άρα **δεν είναι ευθεία της οικογένειας**.

Να τονίσουμε τώρα κάτι σημαντικό !

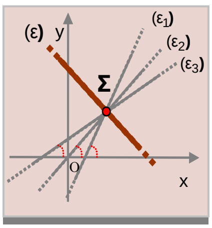
Αν τώρα κάποια ευθεία διέρχεται από το σταθερό σημείο $\Sigma(1,1)$ δεν είναι κατά ανάγκη και ευθεία της οικογένειας.

Για παράδειγμα, θα εξετάσουμε αν η ευθεία $(\delta):x+y-2=0$ είναι ευθεία της παραπάνω οικογένειας $(\varepsilon_\lambda):(\lambda+1)x+(\lambda-2)y+(1-2\lambda)=0$

Για $x=1$ και $y=1$, αυτή δίνει $1+1-2=0$, δηλαδή αυτή διέρχεται από το $\Sigma(1,1)$

Όμως, με βάση αυτό το δεδομένο δε διαπιστώνεται ότι αυτή είναι ευθεία της οικογένειας.

Ας δούμε πρώτα το πιο κάτω παράδειγμα:



Έστω η οικογένεια ευθειών $(\varepsilon_\lambda): y=\lambda^2x+1-\lambda^2$, $\lambda\in R$

Οι ευθείες διέρχονται προφανώς από το σημείο $\Sigma(1,1)$

Επειδή όμως αυτές έχουν **κλίση μη αρνητική** και ίση με λ^2 σημαίνει ότι οι εφαπτομένες των γωνιών που σχηματίζουν αυτές με τον $x'x$ είναι θετικές, δηλαδή αυτές σχηματίζουν με τον $x'x$ γωνίες **οξείες**.

Οπότε, ναι μεν η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+2$ διέρχεται από το σημείο $\Sigma(1,1)$

αλλά, επειδή έχει αρνητική κλίση, προφανώς **δεν** είναι ευθεία της οικογένειας (ε_λ)

Ας δούμε τώρα περίπτωση κατά την οποία μία ευθεία που διέρχεται από ένα σημείο από το οποίο διέρχονται οι ευθείες μιας οικογένειας ευθειών αν είναι μια ευθεία αυτής της οικογένειας.

Γνωρίζουμε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1): A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0$

$(\varepsilon_2): A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0$ **ταυτίζονται**

μόνο αν οι συντελεστές A_1, B_1, Γ_1 **είναι αντίστοιχα ανάλογοι των** A_2, B_2, Γ_2

Ας δούμε ξανά το προηγούμενο παράδειγμα.

Έστω η οικογένεια ευθειών $(\varepsilon_\lambda): (\lambda+1)x + (\lambda-2)y + (1-2\lambda) = 0$

και έστω και η ευθεία $(\varepsilon): y = -x + 2$ **η οποία διέρχεται από το σημείο** $\Sigma(1,1)$

Για να είναι η ευθεία $(\varepsilon): y = -x + 2 \Leftrightarrow (\varepsilon): x + y - 2 = 0$

μια ευθεία της, αρκεί να υπάρχει $\lambda \in R$ ώστε $\dfrac{\lambda+1}{1} = \dfrac{\lambda-2}{1} = \dfrac{1-2\lambda}{-2}$

Από $\dfrac{\lambda+1}{1} = \dfrac{\lambda-2}{1}$ είναι $\lambda+1 = \lambda-2 \Leftrightarrow 1 = -2$ **Αδύνατο**

Οπότε, αυτή δεν είναι ευθεία της οικογένειας.

Ας εξετάσουμε αν η ευθεία $(\zeta): 3x + y - 4 = 0$

είναι ευθεία της παραπάνω οικογένειας $(\varepsilon_\lambda): (\lambda+1)x + (\lambda-2)y + (1-2\lambda) = 0$

Για $x = 1$ και $y = 1$, αυτή δίνει $1+1-2=0$, δηλαδή αυτή διέρχεται από το $\Sigma(1,1)$

Για να είναι η ευθεία $(\zeta): 3x + y - 4 = 0$ **μια ευθεία της**

αρκεί να υπάρχει $\lambda \in R$, ώστε $\dfrac{\lambda+1}{3} = \dfrac{\lambda-2}{1} = \dfrac{1-2\lambda}{-4}$

Λύνοντας το σύστημα αυτό, προκύπτει $\lambda = \dfrac{7}{2}$

Οπότε, αυτή είναι μια ευθεία της οικογένειας αυτής.

Ασκήσεις

β.1● Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\varepsilon_\lambda):(\lambda-1)x+\lambda y+\lambda^2=0$ παράγει **ευθείες**.

β.2● Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2\alpha^2+\alpha+3)x+(\alpha^2-\alpha+1)y+(3\alpha+1)=0$, $\alpha\in R$ παριστάνει ευθείες που **διέρχονται** από το **σταθερό** σημείο $A(-1,2)$

β.3● Έστω η εξίσωση $(\varepsilon_\lambda):(\lambda^3+\lambda-1)x+(\lambda-\lambda^3-1)y+\lambda^3+3\lambda-3=0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (ε_λ) είναι **εξίσωση ευθείας**, για κάθε $\lambda\in R$

β) Όταν ο λ **μεταβάλλεται** στο R
να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες (ε_λ) **διέρχονται** από ένα συγκεκριμένο σημείο.

β.4● Έστω η εξίσωση $(\varepsilon_\lambda):\lambda^2x-y+1-\lambda^2=0$, $\lambda\in R$

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει **ευθείες** που διέρχονται από **σταθερό** σημείο Σ

β) Εξετάστε αν οι ευθείες $(\delta_1):y=x-1$, $(\delta_2):y=2x-2$ και $(\delta_3):y=-x+2$ είναι ευθείες της πιο πάνω δέσμης ευθειών.

β.5● Έστω η εξίσωση $(\varepsilon):(\lambda+\mu-2)x+(2\lambda-\mu-1)y+3-3\lambda=0$, $\lambda,\mu\in R$

α) Να **βρείτε** τους $\lambda,\mu\in R$, ώστε αυτή να **αντιπροσωπεύει ευθείες**.

β) Να αποδείξετε ότι αυτές **διέρχονται** από **σταθερό** σημείο Σ

β.6● Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\varepsilon):(\kappa+\lambda-2)x+(3\kappa-2\lambda-1)y+(2\kappa-3\lambda+1)=0$ με $\kappa\neq\lambda$ αντιπροσωπεύει **ευθείες** οι οποίες **διέρχονται** από **σταθερό** σημείο Σ

β.7● Έστω οι εξισώσεις $(\varepsilon_\lambda):\lambda x+(\lambda+3)y+(\lambda-6)=0$

και $(\delta_\lambda):(2\lambda+1)x+(\lambda-1)y+(\lambda-2)=0$

α) Να αποδείξετε ότι αυτές είναι **ευθείες**.

β) Να βρείτε την **τιμή** του λ, ώστε αυτές να **τέμνονται** πάνω στον άξονα $y'y$

β.8● Έστω η εξίσωση $(\varepsilon):x+(1-\lambda)y-\lambda^2=0$, $\lambda\in R$

Να αποδείξετε ότι **παράγει ευθείες**, οι οποίες όμως **δεν** αποτελούν **δέσμη**.

β.9● Έστω η εξίσωση $(\varepsilon_\varphi):2\sigma\upsilon\nu\varphi x+3\eta\mu\varphi y-6=0$, όπου $\varphi\in R$

α) Να αποδείξετε ότι αυτή παράγει **ευθείες**.

β) Να αποδείξετε ότι τα $A(\sqrt{5},0)$ και $B(-\sqrt{5},0)$ **δεν ανήκουν** σε καμία από αυτές.

γ) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο $d(A,\varepsilon_\varphi)\cdot d(B,\varepsilon_\varphi)$ είναι **σταθερό**.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Α ξ ι ο λ ό γ η σ η 45

Θέμα 1

Α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{v}+\vec{u}+\vec{w}| \le |\vec{v}|+|\vec{u}|+|\vec{w}|$

Β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}|+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}|+|-\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}| \ge |\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|$

Γ) Αν είναι $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|+|3\vec{\alpha}-\vec{\beta}|+|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \ge 1$

Θέμα 2

Έστω τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$, ώστε $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$ και $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=60^o$

Έστω και $\vec{v}$ ένας **γραμμικός συνδυασμός** των $\vec{a}$, $\vec{b}$, με $\vec{a}\vec{v}=3$ και $\vec{b}\vec{v}=9$

Α) Να αποδείξετε ότι $\vec{v}=2\vec{a}+\vec{b}$

Β) Να βρείτε τις **γωνίες** $\left(\widehat{\vec{a},\vec{v}}\right)$ και $\left(\widehat{\vec{b},\vec{v}}\right)$

Θέμα 3

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=-x^4+x^2$, $x\in R$

Α$_1$) Να αποδείξετε ότι $\varphi(x)=\frac{1}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2$

Α$_2$) Να αποδείξετε ότι $\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{4}$

Α$_3$) Να αποδείξετε ότι η φ παρουσιάζει **μέγιστο**.

Β) Έστω τώρα και το **τεταρτοκύκλιο** $(\kappa): x^2+y^2=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$

Να **βρείτε** εκείνη την **εφαπτομένη** (ε) του (κ) που σχηματίζει με τους ημιάξονες στο 1^o τεταρτημόριο **τρίγωνο ελάχιστου εμβαδού**.

Θέμα 4

Έστω τα σημεία $M(m,1-m)$, $m\in R$

και $N(\alpha,\beta)$, ώστε $\alpha^2+\beta^2+2\alpha+2\beta+1=0$, $\alpha,\beta\in R$

Α$_1$) Να βρείτε τον **γεωμετρικό τόπο** των σημείων M

Α$_2$) Να βρείτε τον **γεωμετρικό τόπο** των σημείων N

Β) Να αποδείξετε ότι τα M και N **δεν ταυτίζονται**.

Γ) Να **βρείτε** εκείνα τα σημεία M, N, ώστε το τμήμα MN να γίνεται **ελάχιστο** και να **βρείτε** επίσης και αυτό το **ελάχιστο μήκος**.