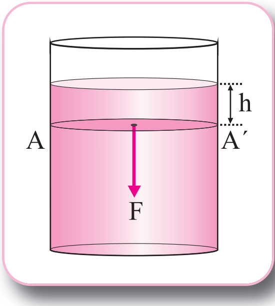
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12ο
ΥΓΡΑ ΣΕ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΠΙΕΣΗ



Η πίεση στα διάφορα σημεία του χώρου που καταλαμβάνει κάποιο υγρό ή στα τοιχώματα του δοχείου μέσα στο οποίο περιέχεται οφείλεται είτε στο βάρος του υγρού είτε σε εξωτερικό αίτιο. Ως εξωτερικό αίτιο μπορούμε να θεωρήσουμε τη δύναμη που κάποιο έμβολο ασκεί σε μια περιοχή του υγρού. Ειδικότερα, θα μελετήσουμε την πίεση που οφείλεται στο βάρος του υγρού.

Έστω το κυλινδρικό δοχείο του σχήματος το οποίο έχει επιφάνεια εμβαδού Α και περιέχει υγρό πυκνότητας ρ που ισορροπεί. Ένα σύνολο μορίων του υγρού αποτελεί την οριζόντια κυκλική επιφάνεια ΑΑ΄.

Το υγρό που βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια ΑΑ΄ έχει ύψος h, μάζα m και όγκο V και ισχύει:

$m = \rho V$ ή $m = \rho A h$

Το βάρος του υγρού που βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια ΑΑ΄ είναι ίσο με:

$w = mg = \rho A h g$

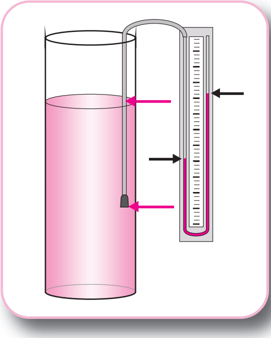
Η επιφάνεια ΑΑ΄ δέχεται δύναμη F, ίση με το βάρος της υπερκείμενης στήλης του υγρού. Επομένως, κάθε σημείο της επιφάνειας δέχεται πίεση:

$$p = \frac{F}{A} \quad \text{ή} \quad p = \frac{\rho A h g}{A} \quad \text{ή} \quad \boxed{\mathbf{p = \rho g h}}$$

Η πίεση αυτή που οφείλεται στο βάρος του υγρού ονομάζεται υδροστατική πίεση.

Η σχέση $p = \rho g h$ αποτελεί **τον θεμελιώδη νόμο της υδροστατικής**.

Η υδροστατική πίεση έχει νόημα μόνο εφόσον το υγρό βρίσκεται μέσα σε πεδίο βαρύτητας.

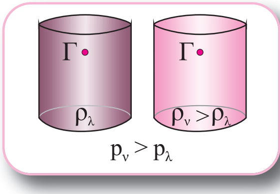


Με το μανόμετρο μετράμε την πίεση που ασκείται στην επιφάνεια μιας ελαστικής μεμβράνης που βυθίζουμε στο υγρό. Ο σωλήνας U περιέχει κάποιο υγρό, συνήθως υδράργυρο. Η διαφορά ύψους του υγρού στα δύο σκέλη του σωλήνα είναι ανάλογη της υδροστατικής πίεσης.

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της υδροστατικής:

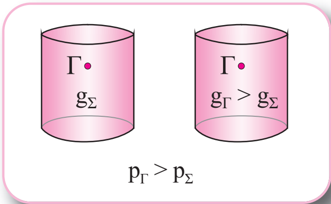
✓ **Η υδροστατική πίεση είναι ανάλογη της πυκνότητας του υγρού.**

Όταν μετράμε την υδροστατική πίεση στο ίδιο βάθος αλλά σε διαφορετικά υγρά, παρατηρούμε ότι η υδροστατική πίεση είναι μεγαλύτερη στο υγρό με τη μεγαλύτερη πυκνότητα.



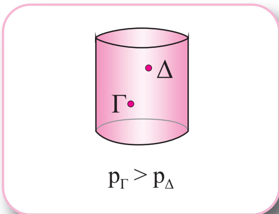
✓ **Η υδροστατική πίεση είναι ανάλογη της επιτάχυνσης της βαρύτητας.**

Η υδροστατική πίεση σε ένα σημείο ενός κλειστού δοχείου γεμάτου με υγρό που βρίσκεται στην επιφάνεια της Σελήνης έχει τιμή έξι φορές περίπου μικρότερη από την τιμή που θα είχε, αν βρισκόταν στην επιφάνεια της Γης.



✓ **Η υδροστατική πίεση είναι ανάλογη του βάθους.**

Όταν μετράμε την υδροστατική πίεση σε σημεία του ίδιου υγρού που βρίσκονται σε διαφορετικό βάθος, παρατηρούμε ότι μεγαλύτερη υδροστατική πίεση έχουμε στο σημείο που βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος.



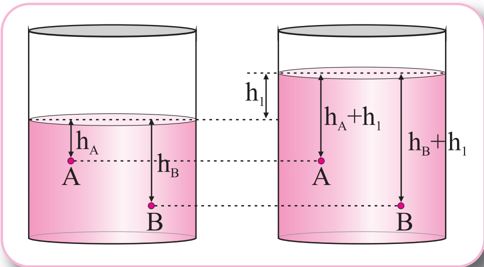
> ⚠ Πειραματικά αποδεικνύεται ότι σε κάθε επιφάνεια που βρίσκεται μέσα σε ένα υγρό που ισορροπεί η υδροστατική πίεση που ασκείται είναι ανεξάρτητη από τον προσανατολισμό της επιφάνειας.

Η εξάρτηση της πίεσης του υγρού από το βάθος δε δημιουργεί πρόβλημα στην καμηλοπάρδαλη, επειδή έχει μεγάλη καρδιά και τα αιμοφόρα αγγεία του εγκεφάλου της είναι ελαστικά και απορροφητικά. Εάν δεν είχε αυτή την κατασκευή, τότε θα λιποθυμούσε, όταν θα σήκωνε ξαφνικά το κεφάλι της, και θα πάθαινε εγκεφαλική αιμορραγία, όταν θα το χαμήλωνε.

Το πάχος ενός φράγματος αυξάνει όσο προχωρούμε από πάνω προς τα κάτω, ώστε να μην κινδυνεύει να σπάσει λόγω των μεγάλων δυνάμεων που αναπτύσσονται στη βάση του.

ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΠΑΣΚΑΛ

Έστω ότι το κλειστό κυλινδρικό δοχείο του σχήματος, στο οποίο ισορροπεί υγρό πυκνότητας ρ, βρίσκεται εντός του πεδίου βαρύτητας. Η πίεση του αέρα στο εσωτερικό του δοχείου θεωρείται αμελητέα. Στα δύο σημεία Α και Β, που βρίσκονται σε βάθη h_A και h_B αντίστοιχα, οι πιέσεις είναι:



$p_A = \rho g h_A$ και $p_B = \rho g h_B$

Προσθέτουμε στο δοχείο μία ποσότητα του ίδιου υγρού, ύψους h_1. Επειδή το υγρό είναι ασυμπίεστο, οι πιέσεις στα σημεία Α και Β είναι:

$p'_A = \rho g(h_A + h_1)$ και $p'_A = \rho g h_A + \rho g h_1$ ή $p'_A = p_A + \rho g h_1$

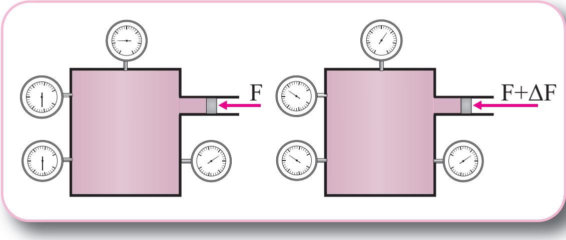
$p'_B = \rho g(h_B + h_1)$ και $p'_B = \rho g h_B + \rho g h_1$ ή $p'_B = p_B + \rho g h_1$

Όπως προκύπτει από τις προηγούμενες σχέσεις, η πίεση και στο σημείο Α και στο σημείο Β αυξήθηκε κατά $\rho g h_1$. Δηλαδή, η μεταβολή της πίεσης, που οφείλεται στην αύξηση του βάρους του υπερκείμενου υγρού, μεταδόθηκε αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία του υγρού.

Η παραπάνω διαπίστωση αποτελεί την αρχή του Pascal:

Η πίεση που δημιουργεί ένα εξωτερικό αίτιο σε κάποιο σημείο ενός υγρού μεταφέρεται αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία του.

Γνωρίζουμε ότι η υδροστατική πίεση έχει νόημα μόνο εφόσον το υγρό βρίσκεται εντός πεδίου βαρύτητας. Έτσι, όταν ένα υγρό βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας, σε όλη του την έκταση επικρατεί η ίδια πίεση.



Για παράδειγμα, όταν το δοχείο του σχήματος βρίσκεται **εκτός πεδίου βαρύτητας**, τα μανόμετρα δείχνουν όλα την ίδια πίεση p. Αν αυξηθεί η δύναμη που ασκείται στο έμβολο κατά ΔF, θα αυξηθεί και η πίεση σε όλα τα μανόμετρα κατά $\frac{\Delta F}{A}$, όπου A είναι το εμβαδόν του εμβόλου. Επομένως, σε όλα τα σημεία η πίεση θα είναι $p' = p + \frac{\Delta F}{A}$.

Αντίθετα, όταν το δοχείο βρίσκεται **εντός του πεδίου βαρύτητας**, η πίεση που δείχνουν τα μανόμετρα είναι διαφορετική στο καθένα από αυτά, ανάλογα με το βάθος στο οποίο βρίσκεται. Έστω δύο σημεία του B και Γ, όπου αρχικά η πίεση είναι p_B και p_Γ αντίστοιχα. Αν αυξηθεί η δύναμη που ασκείται στο έμβολο κατά ΔF, θα αυξηθεί και η πίεση σε όλα τα μανόμετρα κατά $\frac{\Delta F}{A}$. Επομένως, η πίεση στα σημεία B και Γ θα είναι

$p'_B = p_B + \frac{\Delta F}{A}$ και $p'_\Gamma = p_\Gamma + \frac{\Delta F}{A}$ αντίστοιχα.

Όταν κάποιο υγρό ισορροπεί σε ανοικτό δοχείο, στην ελεύθερη επιφάνειά του ασκείται η ατμοσφαιρική πίεση. Επειδή, όπως προβλέπεται από την αρχή του Pascal, η ατμοσφαιρική πίεση μεταφέρεται σε όλα τα σημεία του υγρού, η πίεση σε βάθος h είναι $p = p_{at} + \rho g h$.

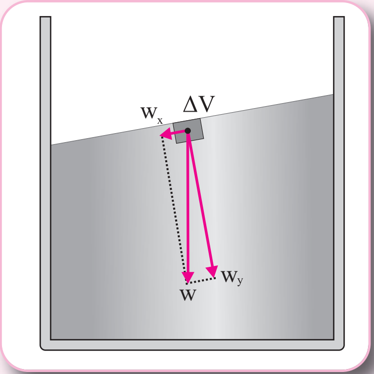
Στο υδραυλικό πιεστήριο του γρύλου η πίεση διατηρείται σταθερή, ενώ η δύναμη πολλαπλασιάζεται.

Το αίμα φεύγει από την καρδιά με ορισμένη πίεση. Σύμφωνα με τον νόμο της υδροστατικής, στα χαμηλότερα σημεία του σώματος (μεγαλύτερο βάθος) η πίεση είναι μεγαλύτερη. Για να μετρήσουμε σωστά την πίεση ενός ανθρώπου, βάζουμε το πιεσόμετρο στο ανώτερο μέρος του χεριού του, που βρίσκεται σχεδόν στο ίδιο ύψος με την καρδιά του.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- **Ελεύθερη επιφάνεια των υγρών**

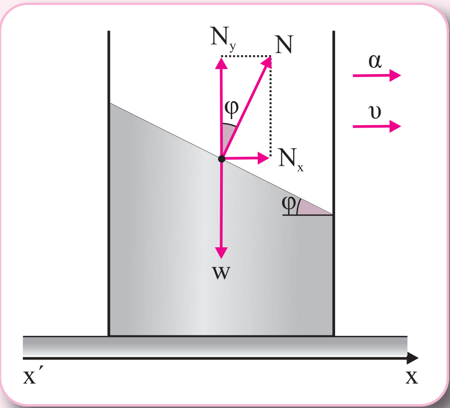
Έστω δοχείο το οποίο περιέχει ένα υγρό που ισορροπεί. Αν υποθέσουμε ότι η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού δεν είναι οριζόντια, το βάρος w ενός επιφανειακού όγκου ΔV μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες w_x και w_y, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η συνιστώσα w_y είναι κάθετη στην ελεύθερη επιφάνεια και εξουδετερώνεται από την αντίδραση των μορίων που βρίσκονται κάτω από την επιφάνεια, επειδή το υγρό είναι ασυμπίεστο. Η συνιστώσα w_x, που είναι παράλληλη με την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, θα κινήσει τον όγκο ΔV κατά την κατεύθυνσή της και επομένως το υγρό δεν ισορροπεί. Η συνιστώσα w_x είναι μηδέν και το υγρό ισορροπεί μόνο όταν η ελεύθερη επιφάνειά του είναι οριζόντια.



Η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού είναι οριζόντια και στην περίπτωση κατά την οποία το δοχείο κινείται ευθύγραμμα ομαλά σε οριζόντιο επίπεδο.

- **Κίνηση δοχείου που περιέχει υγρό σε οριζόντιο επίπεδο**

Ένα ανοικτό δοχείο που περιέχει ιδανικό υγρό κινείται με σταθερή επιτάχυνση α επάνω σε οριζόντιο επίπεδο στη θετική κατεύθυνση του άξονα x΄x, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Έστω η γωνία φ που σχηματίζει η διεύθυνση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού με την οριζόντια διεύθυνση. Μία στοιχειώδης μάζα m της επιφάνειας του υγρού δέχεται εκτός από το βάρος της w και την αντίδραση N.

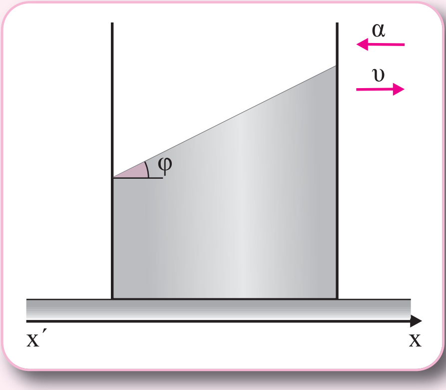
Στον άξονα x΄x έχουμε: $\Sigma F_x = m\alpha_x$ ή $N\eta\mu\varphi = m\alpha$ (1)

Στον άξονα y΄y έχουμε: $\Sigma F_y = 0$ ή $N\sigma\upsilon\nu\varphi = w$ ή $N\sigma\upsilon\nu\varphi = mg$ (2)

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει:

$$\frac{N\eta\mu\varphi}{N\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{m\alpha}{mg} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\alpha}{g}$$

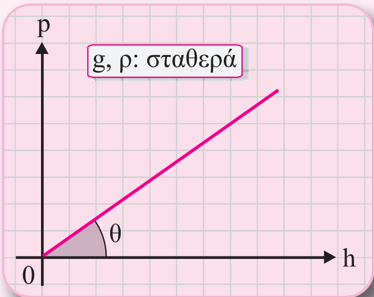
Εάν η επιτάχυνση α είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με την επιτάχυνση της βαρύτητας, η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού τείνει να γίνει κατακόρυφη.



- Ομοίως αποδεικνύεται ότι, εάν το δοχείο κινείται με επιβράδυνση α, η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού παίρνει τη μορφή του σχήματος και ισχύει επίσης $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\alpha}{g}$.

- **Υδροστατική πίεση σε διάφορα σημεία ενός υγρού**

  - Η υδροστατική πίεση σε ένα σημείο ενός υγρού που ισορροπεί δίνεται από τη σχέση $p = \rho g h$. Στη σχέση αυτή όλα τα φυσικά μεγέθη πρέπει να εκφράζονται με μονάδες μέτρησης στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων, δηλαδή η υδροστατική πίεση σε **Pa (N/m^2)**, η πυκνότητα του υγρού σε **kg/m^3**, η επιτάχυνση της βαρύτητας σε **m/s^2** και το βάθος σε **m**.
  - Όταν γνωρίζουμε την υδροστατική πίεση p σε ένα σημείο του υγρού που βρίσκεται σε βάθος h, μπορούμε να βρούμε την υδροστατική πίεση p΄ σε άλλο σημείο που γνωρίζουμε το βάθος του h΄ ή τη σχέση του βάθους του με το βάθος h. Για παράδειγμα, εάν h΄ = 3h, τότε p΄ = 3p.
  - Η υδροστατική πίεση είναι ανάλογη του βάθους h, όταν τα μεγέθη ρ και g είναι σταθερά, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα του σχήματος.

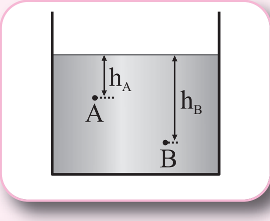
    Η κλίση της ευθείας υπολογίζεται από τη σχέση:

    $$\varepsilon\varphi\theta = \frac{p}{h} = \frac{\rho g h}{h} = \rho g$$

    Δηλαδή, η κλίση της ευθείας εξαρτάται από την πυκνότητα ρ του υγρού.

- **Διαφορά πίεσης μεταξύ δύο σημείων ενός υγρού που ισορροπεί**

Έστω ανοικτό δοχείο στο οποίο ισορροπεί ένα υγρό. Στα σημεία Α και Β του υγρού, που βρίσκονται σε βάθη h_A και h_B αντίστοιχα, οι πιέσεις είναι:



$p_A = p_{at} + \rho g h_A$ και $p_B = p_{at} + \rho g h_B$

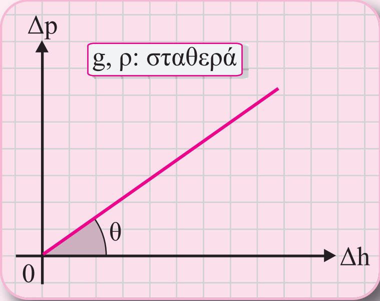
Η διαφορά πίεσης μεταξύ των δύο σημείων είναι:

$\Delta p = p_B - p_A$

ή $\Delta p = p_{at} + \rho g h_B - p_{at} - \rho g h_A$

ή $\Delta p = \rho g(h_B - h_A)$

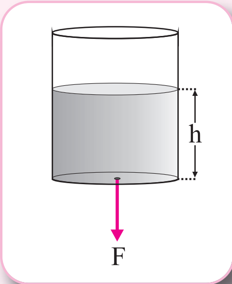
ή $\Delta p = \rho g \Delta h$



Η διαφορά της πίεσης Δp είναι ανάλογη της υψομετρικής διαφοράς Δh, όταν τα μεγέθη ρ και g είναι σταθερά, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα του σχήματος.

- **Δύναμη στον πυθμένα δοχείου**

Έστω ένα δοχείο που περιέχει υγρό πυκνότητας ρ το οποίο σχηματίζει στήλη ύψους h. Ο πυθμένας του δοχείου, εμβαδού Α, δέχεται δύναμη από το υγρό.



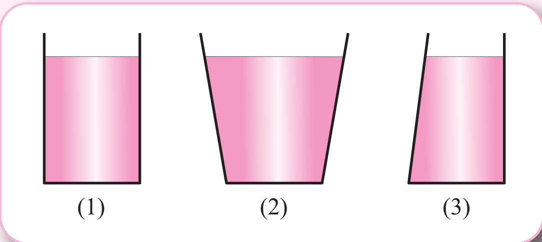
Από τον ορισμό της πίεσης έχουμε: $p = \dfrac{F}{A}$ (1)

Από τη σχέση (1) προκύπτει: $F = pA$ ή $F = p_{at}A + \rho g h A$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η δύναμη που ασκείται στον πυθμένα ενός δοχείου **δεν** εξαρτάται από το σχήμα του δοχείου και από τον όγκο του υγρού.

- **Υδροστατικό παράδοξο**

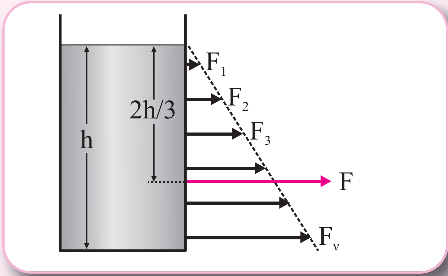
Έστω τρία δοχεία (1), (2) και (3) που έχουν πυθμένες ίσου εμβαδού Α και περιέχουν το ίδιο ιδανικό υγρό πυκνότητας ρ μέχρι του ίδιου ύψους h. Οι δυνάμεις, λόγω της υδροστατικής πίεσης, που ασκούνται στους πυθμένες των τριών δοχείων είναι ίσες, όπως προκύπτει από τη σχέση $F = \rho g h A$. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση του δοχείου (1) η δύναμη αυτή είναι ίση με το βάρος του υπερκείμενου υγρού, στην περίπτωση του δο-



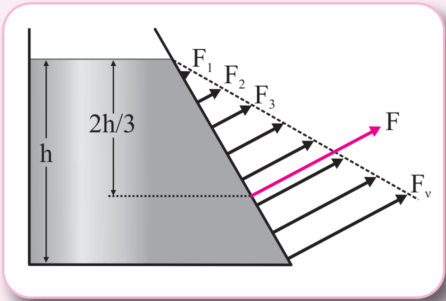
χείου (2) η δύναμη είναι μικρότερη και στην περίπτωση του δοχείου (3) η δύναμη είναι μεγαλύτερη. Αυτό ονομάζεται **υδροστατικό παράδοξο**.

• Δύναμη στο πλευρικό τοίχωμα δοχείου

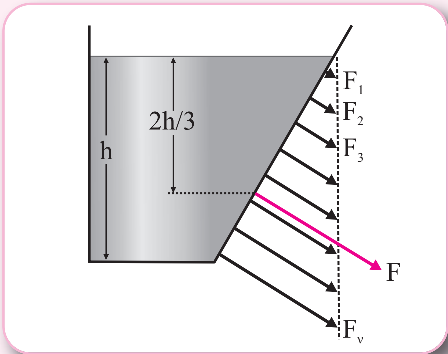
Έστω ένα δοχείο που περιέχει υγρό πυκνότητας ρ το οποίο σχηματίζει στήλη ύψους h. Σε μία στοιχειώδη επιφάνεια του πλευρικού τοιχώματος, που έχει εμβαδόν ΔΑ, ενεργεί κάθετη δύναμη $F_1 = p_1 \Delta A$, όπου p_1 είναι η υδροστατική πίεση στο κέντρο της στοιχειώδους επιφάνειας. Σε όλες τις στοιχειώδεις επιφάνειες του πλευρικού τοιχώματος ενεργούν κάθετα οι δυνάμεις F_1, F_2, ..., F_ν που είναι παράλληλες με την ίδια φορά και το μέτρο τους διαρκώς αυξάνει, όσο κατεβαίνουμε μέσα στο υγρό. Οι δυνάμεις αυτές έχουν συνισταμένη F που είναι κάθετη στο τοίχωμα και το σημείο εφαρμογής της, που ονομάζεται **κέντρο πίεσης**, βρίσκεται σε απόσταση $\frac{2h}{3}$ από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού. Εάν το πλευρικό τοίχωμα είναι κατακόρυφο, η συνισταμένη δύναμη F είναι οριζόντια (σχήμα α). Εάν το πλευρικό τοίχωμα είναι πλάγιο, τότε, ανάλογα με την κλίση του σχετικά με το οριζόντιο επίπεδο, η συνισταμένη δύναμη F έχει φορά προς τα πάνω (σχήμα β) ή προς τα κάτω (σχήμα γ).



σχήμα α



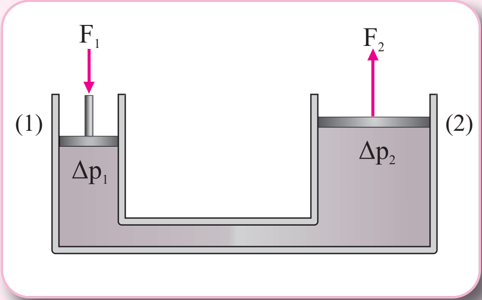
σχήμα β



σχήμα γ

• Υδραυλικό πιεστήριο

Στην εικόνα φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί ένα υδραυλικό πιεστήριο. Όταν ασκήσουμε μία δύναμη F_1 στο έμβολο με εμβαδόν A_1, στο υγρό του πιεστηρίου, εκτός από την ατμοσφαιρική, ασκείται μία επιπλέον πίεση $\Delta p_1 = \frac{F_1}{A_1}$. Σύμφωνα με την αρχή του Pascal, το υγρό ασκεί στο έμβολο (2) με εμβαδόν A_2 δύναμη F_2 και επιπλέον πίεση $\Delta p_2 = \frac{F_2}{A_2}$, ίση με τη Δp_1. Επομένως:



$$\Delta p_1 = \Delta p_2 \quad \text{ή} \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \text{ή} \quad F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

Η δύναμη F_2 είναι τόσες φορές μεγαλύτερη από τη δύναμη F_1 όσες φορές είναι μεγαλύτερο το εμβαδόν του εμβόλου (2) από το εμβαδόν του εμβόλου (1).

Όπως προκύπτει από τη σχέση $F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$, εάν μεταβάλουμε κατά το ίδιο ποσοστό τα εμβαδά των δύο εμβόλων (1) και (2) και ασκήσουμε την ίδια δύναμη F_1 στο έμβολο (1), δε θα μεταβληθεί το μέτρο της δύναμης F_2 που ασκεί το υγρό στο έμβολο (2). Η διαφορά πίεσης λόγω του βάρους του υγρού που υπάρχει εξαιτίας της υψομετρικής διαφοράς των δύο εμβόλων κατά την ανύψωση ενός αντικειμένου θεωρείται αμελητέα.

- **Αρχή διατήρησης του έργου στο υδραυλικό πιεστήριο**

Εάν το έμβολο (1) του πιεστηρίου μετατοπιστεί προς τα μέσα κατά s_1, εκτοπίζεται όγκος υγρού $V_1 = A_1 s_1$ και το έργο της δύναμης F_1 γι' αυτή τη μετατόπιση είναι $W_{F_1} = F_1 s_1$. Επειδή το υγρό είναι ασυμπίεστο, το έμβολο (2) μετατοπίζεται προς τα έξω κατά s_2, ώστε το υγρό που εκτοπίζεται από τον λεπτό σωλήνα να καταλάβει όγκο $V_2 = A_2 s_2$. Επομένως, κατά τη μετατόπιση του εμβόλου (2) ισχύει:

$$V_1 = V_2 \quad \text{ή} \quad A_1 s_1 = A_2 s_2 \quad \text{ή} \quad s_2 = \frac{A_1}{A_2} s_1$$

Το έργο που παράγεται από τη δύναμη F_2 είναι:

$$W_{F_2} = F_2 s_2 \quad \text{ή} \quad W_{F_2} = F_2 \frac{A_1}{A_2} s_1 \; (1)$$

Γνωρίζουμε ότι οι δυνάμεις F_1 και F_2 συνδέονται με τη σχέση: $F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$ (2)

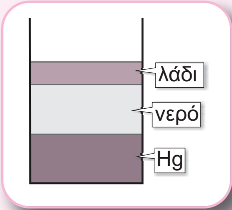
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$W_{F_2} = F_1 \frac{A_2}{A_1}\frac{A_1}{A_2} s_1 \quad \text{ή} \quad W_{F_2} = F_1 s_1 \quad \text{ή} \quad W_{F_2} = W_{F_1}$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε, εάν εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

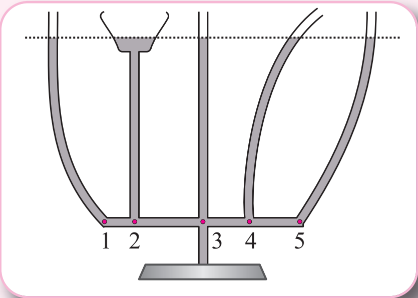
- **Ισορροπία υγρών που δεν αναμειγνύονται**

Μέσα στο δοχείο του σχήματος υπάρχουν τρία υγρά που δεν αναμειγνύονται, υδράργυρος, νερό και λάδι. Όταν τα υγρά ισορροπούν, σχηματίζουν διαδοχικά στρώματα κατά τη σειρά της πυκνότητάς τους, με το πυκνότερο υγρό να βρίσκεται στο κατώτερο τμήμα του δοχείου. Οι επιφάνειες διαχωρισμού του ενός υγρού από το άλλο είναι οριζόντια επίπεδα, επειδή σε κάθε επιφάνεια διαχωρισμού η πίεση είναι σταθερή.



- **Συγκοινωνούντα δοχεία με ένα υγρό**

Όταν γεμίζουμε με ένα υγρό μία σειρά δοχείων διαφορετικού σχήματος τα οποία συγκοινωνούν μέσω ενός σωλήνα, παρατηρούμε ότι σε όλα τα δοχεία η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αυτό εξηγείται ως εξής:



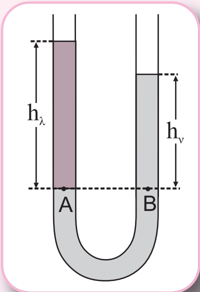
Το υγρό που βρίσκεται στον κοινό οριζόντιο σωλήνα ισορροπεί. Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει σε όλα τα σημεία του να επικρατεί η ίδια πίεση. Αν σε κάποιο σημείο η πίεση ήταν διαφορετική, τότε θα ασκούνταν επιπλέον δύναμη η οποία θα προκαλούσε την κίνηση του υγρού. Άρα:

$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$ ή

$p_{at} + \rho g h_1 = p_{at} + \rho g h_2 = p_{at} + \rho g h_3 = p_{at} + \rho g h_4 = p_{at} + \rho g h_5$ ή $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h_5$

- **Συγκοινωνούντα δοχεία με διαφορετικά υγρά**

Το δοχείο του σχήματος μπορεί να θεωρηθεί ως δύο συγκοινωνούντα δοχεία. Έστω ότι στα δύο δοχεία ισορροπούν δύο διαφορετικά υγρά που δεν αναμειγνύονται, π.χ. νερό και λάδι που έχουν πυκνότητες ρ_ν και ρ_λ αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι οι ελεύθερες επιφάνειες των δύο υγρών δε βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Αυτό εξηγείται ως εξής:



Θεωρούμε το οριζόντιο επίπεδο που είναι προέκταση της επιφάνειας διαχωρισμού των δύο υγρών. Εφόσον τα υγρά ισορροπούν, στα σημεία Α και Β οι πιέσεις είναι ίσες:

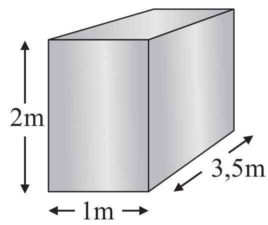
$$p_A = p_B \quad ή \quad p_{at} + \rho_\lambda g h_\lambda = p_{at} + \rho_\nu g h_\nu \quad ή \quad \frac{h_\lambda}{h_\nu} = \frac{\rho_\nu}{\rho_\lambda}$$

Δηλαδή, τα ύψη των δύο υγρών πάνω από την επιφάνεια διαχωρισμού είναι αντιστρόφως ανάλογα με τις πυκνότητές τους.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

12.1) Το κιβώτιο του σχήματος έχει βάρος w = 210N. Να υπολογιστεί η πίεση που ασκεί το κιβώτιο στο έδαφος, όταν στο έδαφος ακουμπά η έδρα με διαστάσεις:

α) 2m και 1m, β) 1m και 3,5m, γ) 2m και 3,5m.



Απάντηση

Η πίεση που προκαλεί μία δύναμη F_K που ασκείται κάθετα σε μία επιφάνεια εμβαδού Α υπολογίζεται από τη σχέση $p = \frac{F_K}{A}$.

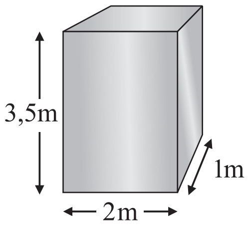
Η κάθετη δύναμη που ασκείται στο έδαφος και στις τρεις περιπτώσεις είναι ίση με το βάρος του κιβωτίου.

α) Υπολογισμός της πίεσης p_1

Όταν στο έδαφος ακουμπά η έδρα με διαστάσεις 2m και 1m, το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται σε επαφή με το έδαφος είναι:

$A_1 = 1m \cdot 2m = 2m^2$

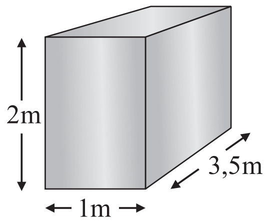
Η πίεση είναι: $p_1 = \frac{F_K}{A_1} = \frac{w}{A_1} = \mathbf{105\ N/m^2}$



β) Υπολογισμός της πίεσης p_2

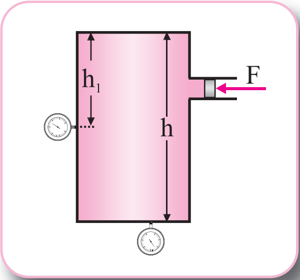
Όταν στο έδαφος ακουμπά η έδρα με διαστάσεις 1m και 3,5m, το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται σε επαφή με το έδαφος είναι: $A_2 = 1m \cdot 3{,}5m = 3{,}5m^2$

Η πίεση είναι: $p_2 = \frac{F_K}{A_2} = \frac{w}{A_2} = \mathbf{60\ N/m^2}$



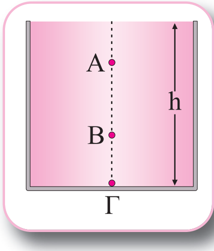
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

12.100) Το κλειστό δοχείο του σχήματος έχει ύψος $h = 2m$ και είναι γεμάτο με νερό πυκνότητας $\rho = 10^3 kg/m^3$ που ισορροπεί.



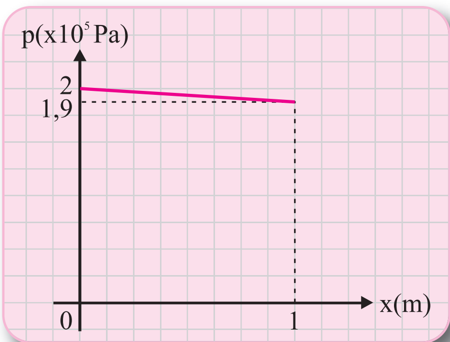
α) Να υπολογιστεί η υδροστατική πίεση που μετρά το μανόμετρο σε βάθος $h_1 = 1m$ και στον πυθμένα του δοχείου.
β) Να υπολογιστεί η μεταβολή της υδροστατικής πίεσης που μετρά το μανόμετρο σε βάθος $h_2 = 1{,}4m$, όταν στο έμβολο, που έχει εμβαδόν $A = 10^{-2} m^2$, ασκηθεί σταθερή κάθετη δύναμη με φορά προς το νερό και μέτρο $F = 100N$.
γ) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται η πίεση στον πυθμένα του δοχείου σε συνάρτηση με τη δύναμη που ασκείται στο έμβολο, εάν η δύναμη αυτή έχει μέτρο $F = 10t$ (SI) και ασκείται για χρονικό διάστημα $\Delta t = 10s$.

12.101) Η εγκάρσια διατομή ενός ανοικτού δοχείου είναι το τετράγωνο του σχήματος. Το δοχείο έχει ύψος $h = 8m$ και είναι γεμάτο με νερό πυκνότητας $\rho = 10^3 kg/m^3$ που ισορροπεί. Τα σημεία Α, Β και Γ βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφη που διέρχεται από το κέντρο του τετραγώνου και το σημείο Γ είναι στον πυθμένα του δοχείου. Γνωρίζουμε ότι η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_{at} = 10^5 Pa$ και ότι οι πιέσεις στα σημεία Α, Β και Γ συνδέονται με τις σχέσεις:



$\frac{p_A}{p_B} = \frac{11}{17}$ και $\frac{p_A}{p_\Gamma} = \frac{11}{18}$. Να υπολογιστούν:
α) το βάθος h_A του σημείου Α από την επιφάνεια του νερού,
β) η απόσταση ΑΒ,
γ) η απόσταση d από το άνω αριστερό άκρο του δοχείου ενός σημείου Δ που βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφη με τα σημεία Α, Β και Γ και στο οποίο η υδροστατική πίεση είναι $p_\Delta = 1{,}3 \cdot 10^5 Pa$.

12.102) Μία ποσότητα νερού, ύψους $h = 10m$, ισορροπεί μέσα σε ανοικτό δοχείο. Στο διάγραμμα του σχήματος φαίνεται πώς μεταβάλλεται η πίεση στα σημεία του νερού σε συνάρτηση με την απόστασή τους από τον πυθμένα του δοχείου.

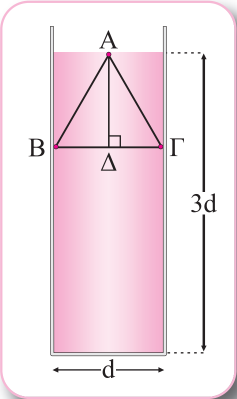


α) Να υπολογιστεί η ατμοσφαιρική πίεση και η πυκνότητα του νερού.

β) Να υπολογιστεί η πίεση σε ένα σημείο Α του νερού που απέχει απόσταση $x_A = 2m$ από τον πυθμένα του δοχείου.

γ) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται η υδροστατική πίεση στα σημεία του νερού σε συνάρτηση με την απόστασή τους από τον πυθμένα.

12.103) Η εγκάρσια διατομή ενός ανοικτού δοχείου είναι το παραλληλόγραμμο του σχήματος. Το δοχείο περιέχει μέχρι ύψους 3d υγρό πυκνότητας ρ που ισορροπεί. Το σημείο Α της επιφάνειας του υγρού και τα σημεία Β και Γ των τοιχωμάτων του δοχείου σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο. Θεωρούνται γνωστά η πυκνότητα ρ του υγρού, η επιτάχυνση της βαρύτητας g, το πλάτος d του δοχείου και η ατμοσφαιρική πίεση p_{at} στην επιφάνεια του υγρού. Να υπολογιστούν:

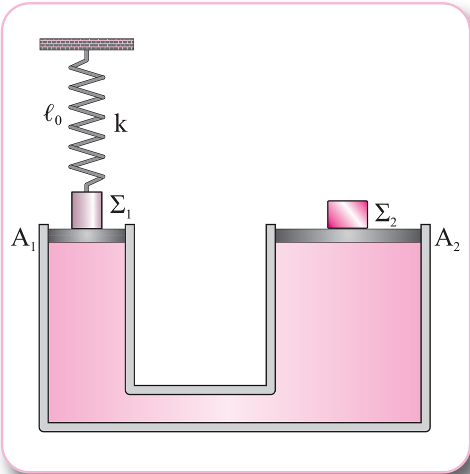


α) η υδροστατική πίεση στο σημείο Δ, εάν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ,

β) η υδροστατική πίεση στο μέσο Ζ της πλευράς ΑΓ,

γ) η πίεση σε ένα σημείο Θ του πυθμένα του δοχείου.

12.104) Α. Τα έμβολα του υδραυλικού ανυψωτήρα του σχήματος είναι κυλινδρικά και έχουν ακτίνες $r_1 = 4cm$ και $r_2 = 24cm$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ τοποθετούμε πάνω στο μικρό έμβολο ένα σώμα $Σ_1$, μάζας $m_1 = 20kg$, το οποίο είναι ενωμένο στο ελεύθερο άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 400N/m$ που βρίσκεται στο φυσικό του μήκος και ταυτόχρονα τοποθετούμε στο μεγάλο έμβολο σώμα $Σ_2$, μάζας $m_2 = 200kg$.

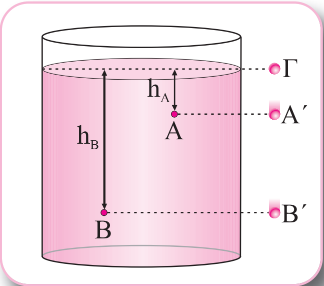


$α_1$) Να υπολογιστεί η επιπλέον δύναμη που δέχεται το μεγάλο έμβολο από το υγρό τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$.

$α_2$) Να αποδειχθεί ότι το σώμα $Σ_2$ αρχίζει να κινείται προς τα πάνω και να υπολογιστεί η επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$.

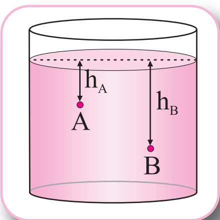
Β. Εάν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $x = 0,1m$, να υπολογιστεί η επιπλέον δύναμη που δέχεται το μεγάλο έμβολο.

12.105) Ένα ανοικτό δοχείο είναι γεμάτο με νερό πυκνότητας $\rho = 10^3 kg/m^3$ που ισορροπεί. Δύο σημεία Α και Β βρίσκονται σε βάθη h_A και h_B αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ από το σημείο Γ, που βρίσκεται εκτός του δοχείου και στο οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από την επιφάνεια του υγρού, αφήνουμε ένα μικρό σώμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση. Το σώμα διέρχεται από τα σημεία Α΄ και Β΄, τα οποία βρίσκονται στα οριζόντια επίπεδα που διέρχονται από τα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τις χρονικές στιγμές $t_1 = 0{,}1s$ και $t_2 = 0{,}2s$. Να υπολογιστούν:



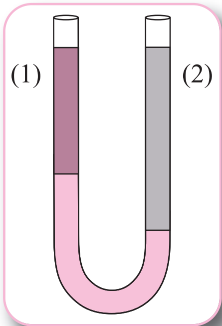
α) τα βάθη h_A και h_B στα οποία βρίσκονται τα σημεία Α και Β αντίστοιχα,
β) οι υδροστατικές πιέσεις $p_{υδρ_A}$ και $p_{υδρ_B}$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα,
γ) οι πιέσεις p_A και p_B στα σημεία Α και Β,
δ) η υδροστατική πίεση στο μέσο Δ της υψομετρικής απόστασης των σημείων Α και Β.
Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at} = 10^5 Pa$.

12.106) Στο ανοικτό δοχείο του σχήματος περιέχεται νερό πυκνότητας $\rho = 10^3 kg/m^3$ που ισορροπεί. Στα σημεία Α και Β, που βρίσκονται σε βάθη h_A και h_B αντίστοιχα, οι υδροστατικές πιέσεις συνδέονται με τις σχέσεις $p_{υδρ_A} + p_{υδρ_B} = 2p_{at}$ και $\frac{p_{υδρ_A}}{p_{υδρ_B}} = \frac{1}{2}$. Η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_{at} = 10^5 Pa$. Να υπολογιστούν:



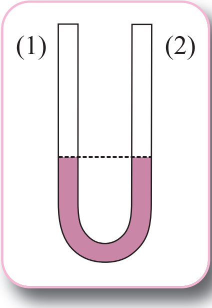
α) ο λόγος $\frac{h_A}{h_B}$,
β) οι υδροστατικές πιέσεις $p_{υδρ_A}$ και $p_{υδρ_B}$,
γ) οι πιέσεις p_A και p_B στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

12.107) Στον σωλήνα του σχήματος αρχικά περιέχεται νερό πυκνότητας $\rho_v = 10^3 kg/m^3$. Ρίχνουμε στο σκέλος (1) του σωλήνα λάδι πυκνότητας $\rho_\lambda = 0{,}72 \cdot 10^3 kg/m^3$ και στο σκέλος (2) του σωλήνα πετρέλαιο πυκνότητας $\rho_\pi = 0{,}8 \cdot 10^3 kg/m^3$. Όταν τα υγρά ισορροπήσουν, οι ελεύθερες επιφάνειες του λαδιού και του πετρελαίου είναι στο ίδιο ύψος, ενώ το νερό παρουσιάζει υψομετρική διαφορά $h = 0{,}1m$ στα δύο σκέλη του σωλήνα. Η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_{at} = 10^5 Pa$. Να υπολογιστούν:



α) το ύψος της στήλης του λαδιού και το ύψος της στήλης του πετρελαίου,
β) οι πιέσεις στις διαχωριστικές επιφάνειες μεταξύ λαδιού και νερού και μεταξύ πετρελαίου και νερού.

12.108) Σε ισοδιαμετρικό σωλήνα σχήματος U διατομής A τοποθετούμε νερό πυκνότητας ρ, ώστε να σχηματιστεί στήλη συνολικού μήκους ℓ = 0,8m. Στο ένα σκέλος του σωλήνα μετατοπίζουμε λίγο προς τα κάτω το νερό από τη θέση ισορροπίας και τη χρονική στιγμή t_0 = 0s το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί.

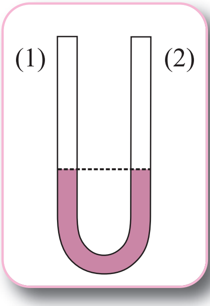


α) Να αποδειχθεί ότι το νερό εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

β) Να υπολογιστεί η περίοδος και η συχνότητα της ταλάντωσης.

γ) Να προσδιοριστεί η χρονική στιγμή που το νερό στο αριστερό σκέλος διέρχεται για τρίτη φορά από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

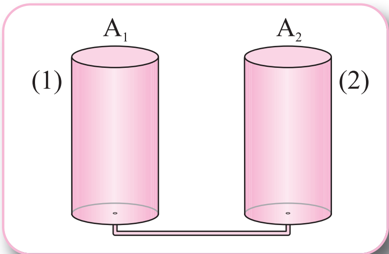
12.109) Στον σωλήνα του σχήματος περιέχεται υδράργυρος. Ρίχνουμε στο σκέλος (1) υγρό A που σχηματίζει στήλη ύψους h_1 = 10cm και πάνω από αυτό νερό που σχηματίζει στήλη ύψους h_2 = 20cm. Στο σκέλος (2) του σωλήνα ρίχνουμε νερό που σχηματίζει στήλη ύψους h_3 = 12cm και πάνω από αυτό πετρέλαιο που σχηματίζει στήλη ύψους h_4 = 10cm. Τα υγρά δεν αναμειγνύονται μεταξύ τους. Γνωρίζουμε τις πυκνότητες του υδραργύρου, του νερού, του υγρού A και του πετρελαίου $\rho_\upsilon = 13{,}6 \cdot 10^3$kg/m³, $\rho_\nu = 10^3$kg/m³, $\rho_A = 1{,}84 \cdot 10^3$kg/m³ και $\rho_\pi = 0{,}8 \cdot 10^3$kg/m³ αντίστοιχα. Αφού ισορροπήσει το σύστημα, να υπολογιστούν:



α) η υψομετρική διαφορά του υδραργύρου στα δύο σκέλη του σωλήνα,

β) η διαφορά πίεσης σε δύο σημεία που βρίσκονται το ένα στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ νερού και υγρού A και το άλλο στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ νερού και πετρελαίου.

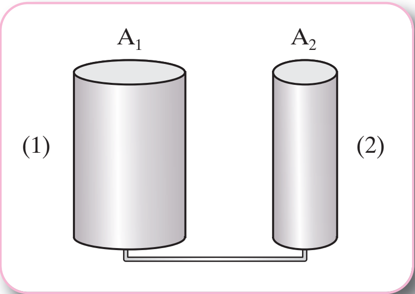
12.110) Δύο όμοια δοχεία περιέχουν νερό και συγκοινωνούν μέσω ενός σωλήνα αμελητέας χωρητικότητας, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο ένα δοχείο ρίχνουμε πετρέλαιο που σχηματίζει στήλη h_π = 0,8m και πάνω από το πετρέλαιο λάδι που σχηματίζει στήλη ύψους h_λ = 0,5m. Γνωρίζουμε τις πυκνότητες του νερού, του λαδιού και του πετρελαίου $\rho_\nu = 10^3$kg/m³, $\rho_\lambda = 0{,}72 \cdot 10^3$kg/m³ και $\rho_\pi = 0{,}8 \cdot 10^3$kg/m³ αντίστοιχα και ότι η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_{at} = 10^5$Pa. Να υπολογιστούν:



α) η υψομετρική διαφορά μεταξύ της διαχωριστικής επιφάνειας νερού – πετρελαίου και της ελεύθερης επιφάνειας του νερού,

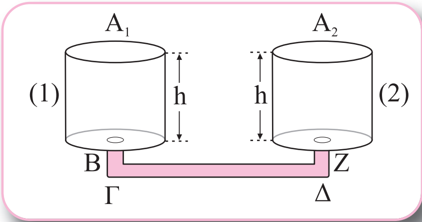
β) οι πιέσεις στη διαχωριστική επιφάνεια νερού – πετρελαίου και στη διαχωριστική επιφάνεια πετρελαίου – λαδιού.

12.111) Δύο κυλινδρικά δοχεία (1) και (2) έχουν διατομές $A_1 = 40cm^2$ και $A_2 = 10cm^2$ αντίστοιχα και συγκοινωνούν μεταξύ τους με σωλήνα ασήμαντης χωρητικότητας, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι πυθμένες των δύο δοχείων βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Ρίχνουμε στο δοχείο (1) νερό όγκου $V_\nu = 2 \cdot 10^{-3} m^3$ και λάδι όγκου V_λ. Οι ελεύθερες επιφάνειες του νερού και του λαδιού έχουν υψομετρική διαφορά $h = 10cm$. Γνωρίζουμε τις πυκνότητες του νερού και του λαδιού $\rho_\nu = 10^3 kg/m^3$ και $\rho_\lambda = 0{,}72 \cdot 10^3 kg/m^3$ αντίστοιχα και ότι η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_{at} = 10^5 Pa$. Να υπολογιστούν:



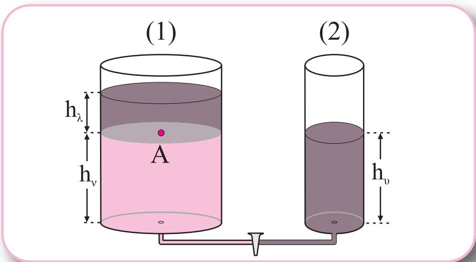
α) ο όγκος V_λ του λαδιού,
β) το ύψος της στήλης του νερού σε κάθε δοχείο,
γ) η πίεση στη διαχωριστική επιφάνεια νερού – λαδιού.

12.112) Δύο κυλινδρικά δοχεία (1) και (2) έχουν διατομές $A_1 = A_2 = A = 10^{-3} m^2$ και ίδιο ύψος $h = 0{,}95m$ και συγκοινωνούν μεταξύ τους με τον μεγάλου μήκους σωλήνα ΒΓΔΖ διατομής $A_3 = 10^{-4} m^2$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι πυθμένες των δύο δοχείων βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Τα δοχεία (1) και (2) είναι άδεια, ενώ ο σωλήνας ΒΓΔΖ είναι γεμάτος με νερό. Ρίχνουμε στο δοχείο (1) λάδι μέχρι να γεμίσει. Γνωρίζουμε τις πυκνότητες του νερού και του λαδιού $\rho_\nu = 10^3 kg/m^3$ και $\rho_\lambda = 0{,}72 \cdot 10^3 kg/m^3$ αντίστοιχα και ότι η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_{at} = 10^5 Pa$. Να υπολογιστούν:



α) πόσο θα κατέβει το νερό στον σωλήνα ΒΓ και πόσο θα ανέβει στο δοχείο (2),
β) η πίεση στον πυθμένα κάθε δοχείου.

12.113) Δύο κυλινδρικά δοχεία (1) και (2) έχουν διατομές $A_1 = 80cm^2$ και $A_2 = 40cm^2$ αντίστοιχα και συγκοινωνούν μεταξύ τους με σωλήνα ασήμαντης χωρητικότητας ο οποίος έχει στρόφιγγα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι πυθμένες των δύο δοχείων βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.



Α. Αρχικά η στρόφιγγα είναι κλειστή. Ρίχνουμε στο δοχείο (1) νερό που σχηματίζει στήλη ύψους $h_v = 40cm$ και πάνω από αυτό λάδι που σχηματίζει στήλη ύψους $h_λ = 20cm$. Στο δοχείο (2) ρίχνουμε υδράργυρο που σχηματίζει στήλη ύψους $h_υ = 40cm$. Γνωρίζουμε τις πυκνότητες του υδραργύρου, του νερού και του λαδιού $ρ_υ = 13{,}6 \cdot 10^3 kg/m^3$, $ρ_v = 10^3 kg/m^3$ και $ρ_λ = 0{,}72 \cdot 10^3 kg/m^3$ αντίστοιχα και ότι η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_{at} = 10^5 Pa$. Να υπολογιστούν:

$α_1$) η πίεση στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ λαδιού και νερού,

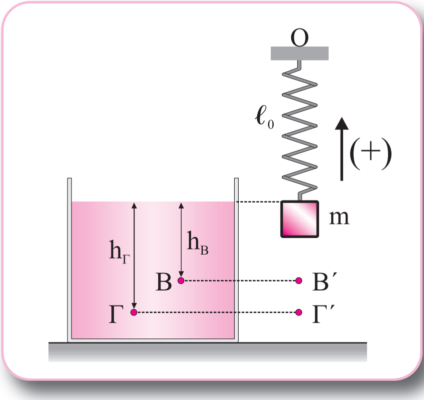
$α_2$) η πίεση στον πυθμένα κάθε δοχείου.

Β. Κάποια χρονική στιγμή ανοίγουμε τη στρόφιγγα.

$β_1$) Να εξηγηθεί ποιο υγρό θα μετακινηθεί και σε ποιο δοχείο.

$β_2$) Να υπολογιστεί το ύψος του υδραργύρου σε κάθε δοχείο.

12.114) Το δοχείο του σχήματος είναι γεμάτο με νερό πυκνότητας $ρ = 10^3 kg/m^3$ που ισορροπεί. Τα σημεία Β και Γ του υγρού βρίσκονται σε βάθη h_B και $h_Γ$ αντίστοιχα. Δίπλα στο δοχείο υπάρχει κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 400N/m$, το ένα άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο Ο και το ελεύθερο άκρο του βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με την ελεύθερη επιφάνεια του νερού. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου δένουμε σώμα μάζας $m = 9kg$ και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Όταν το σώμα διέρχεται από τις θέσεις Β΄ και Γ΄, που βρίσκονται στα ίδια οριζόντια επίπεδα με τα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, η κινητική ενέργεια του σώματος και η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης συνδέονται με τις σχέσεις $\frac{K_{B'}}{U_{B'}} = 1$ και $\frac{K_{Γ'}}{U_{Γ'}} = \frac{1}{3}$. Δίνονται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at} = 10^5 Pa$, $\sqrt{2} = 1{,}41$ και $\sqrt{3} = 1{,}73$.



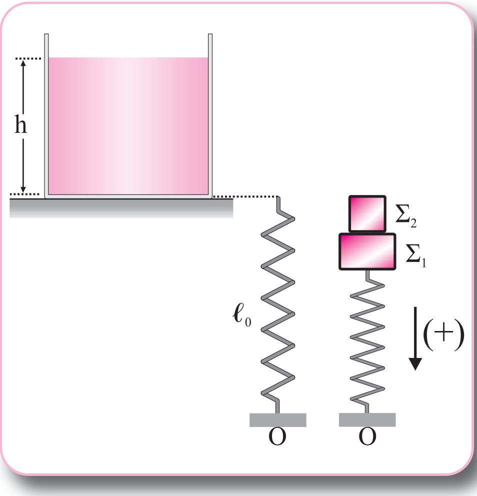
α) Να γραφτεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.

β) Να υπολογιστούν τα μέτρα της επιτάχυνσης του σώματος στις θέσεις Β΄ και Γ΄.

γ) Να βρεθούν οι πιέσεις στα σημεία Β και Γ.

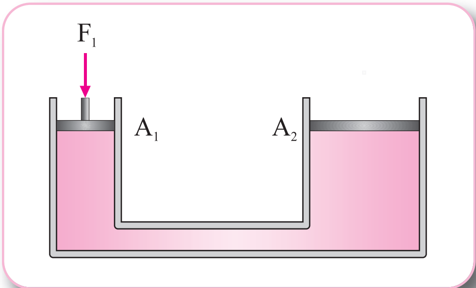
δ) Να υπολογιστεί η υδροστατική πίεση στο σημείο Κ, που βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το σημείο Κ΄, στο οποίο το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης επαναφοράς ($|F_{ελ}| = |F_{επ}|$).

12.115) Ένα δοχείο ύψους $h = 1m$ είναι γεμάτο με νερό πυκνότητας $ρ = 10^3 kg/m^3$ που ισορροπεί. Δίπλα στο δοχείο υπάρχει κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 200N/m$, το ένα άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο Ο. Όταν το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, το ελεύθερο άκρο του είναι στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με τον πυθμένα του δοχείου. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου δένουμε σώμα Σ_1, μάζας $m_1 = 1kg$, πάνω στο οποίο είναι κολλημένο σώμα Σ_2, μάζας $m_2 = 1kg$. Το σύστημα των δύο σωμάτων ισορροπεί. Εκτρέπουμε το σύστημα των σωμάτων κατά $d = 0{,}4m$ στη θετική φορά και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at} = 10^5Pa$.



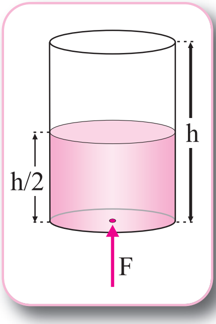
α) Να γραφτεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του συστήματος των σωμάτων σε συνάρτηση με τον χρόνο.
β) Να υπολογιστεί η πίεση στο σημείο Β, που βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το σημείο Β΄, για το οποίο ισχύει $x_{B'} = -\frac{A}{2}$.
γ) Να υπολογιστεί η υδροστατική πίεση στο σημείο Γ, που βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το σημείο Γ΄, στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος μηδενίζεται για δεύτερη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$.
δ) Να υπολογιστεί η υδροστατική πίεση στο σημείο Δ, που βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το σημείο Δ΄, από το οποίο όταν διέρχεται το σύστημα των δύο σωμάτων η δύναμη επαφής που δέχεται το σώμα Σ_2 έχει αλγεβρική τιμή $F_{επ} = -40N$.

12.116) Τα εμβαδά A_1 και A_2 των εμβόλων στον υδραυλικό ανυψωτήρα του σχήματος συνδέονται με τη σχέση $A_2 = 4A_1$. Κάθετα στην επιφάνεια του μικρού εμβόλου ασκούμε σταθερή δύναμη μέτρου $F_1 = 200N$, που προκαλεί μετατόπιση του μικρού εμβόλου κατά $s_1 = 20cm$ σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 2s$. Να υπολογιστούν:



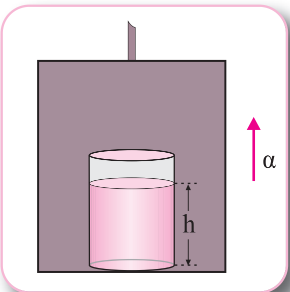
α) η μετατόπιση s_2 του μεγάλου εμβόλου στο ίδιο χρονικό διάστημα $\Delta t = 2s$,
β) η δύναμη F_2 που ασκείται στο μεγάλο έμβολο,
γ) η μέση ταχύτητα μετατόπισης των δύο εμβόλων,
δ) η μέση ισχύς της δύναμης F_1 καθώς και της δύναμης F_2.

12.117) Ένα δοχείο με κατακόρυφα τοιχώματα έχει ύψος h και περιέχει νερό μέχρι ύψους $\frac{h}{2}$. Ο πυθμένας του δοχείου μπορεί να μετακινείται κατακόρυφα κατά μήκος των τοιχωμάτων του χωρίς τριβές. Το βάρος του πυθμένα του δοχείου θεωρείται αμελητέο. Αρχίζουμε να μετακινούμε με σταθερή ταχύτητα τον πυθμένα, ασκώντας σ' αυτόν σταθερή κατακόρυφη δύναμη F με φορά προς τα πάνω. Να υπολογιστεί το έργο της εξωτερικής δύναμης που ασκείται στον πυθμένα μέχρι να χυθεί:



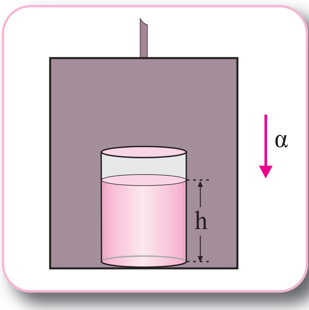
α) το μισό νερό,
β) ολόκληρη η ποσότητα του νερού.

12.118) Στη βάση ενός ανελκυστήρα βρίσκεται κυλινδρικό δοχείο με εμβαδόν πυθμένα $A = 10^{-2}m^2$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το δοχείο περιέχει μέχρι ύψους $h = 2m$ νερό πυκνότητας $\rho = 10^3 kg/m^3$. Ο ανελκυστήρας αρχίζει να ανέρχεται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου α. Η υδροστατική πίεση στον πυθμένα του δοχείου είναι $p = 4 \cdot 10^4 Pa$. Η πίεση του αέρα στο εσωτερικό του ανελκυστήρα και η μάζα του δοχείου θεωρούνται αμελητέες.



α) Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης που δέχεται ο ανελκυστήρας από το νερό.
β) Να βρεθεί το μέτρο της επιτάχυνσης του ανελκυστήρα.
γ) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται η υδροστατική πίεση στον πυθμένα του δοχείου σε συνάρτηση με την επιτάχυνση του ανελκυστήρα για τιμές από 0 έως $\alpha' = 2\alpha$.

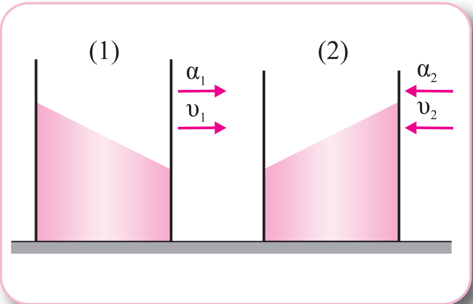
12.119) Στη βάση ενός ανελκυστήρα βρίσκεται κυλινδρικό δοχείο που έχει εμβαδόν πυθμένα $A = 2 \cdot 10^{-2}m^2$ και περιέχει μέχρι ύψους $h = 1m$ υδράργυρο πυκνότητας $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3 kg/m^3$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ ο ανελκυστήρας βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0m$ και αρχίζει να κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω με επιτάχυνση μέτρου $\alpha = \frac{x}{2}$ SI. Θεωρούμε ότι η μάζα του δοχείου και η πίεση του αέρα στο εσωτερικό του ανελκυστήρα είναι αμελητέες.



α) Να υπολογιστεί η δύναμη που δέχεται ο πυθμένας του δοχείου, όταν ο ανελκυστήρας βρίσκεται στη θέση $x_1 = 2m$.

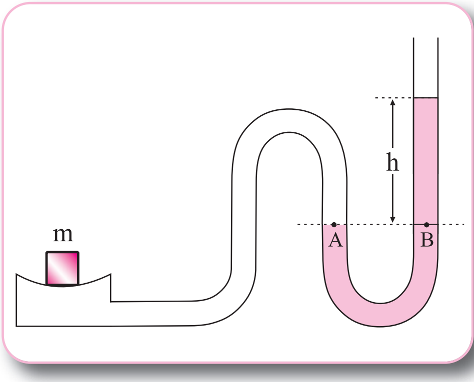
β) Να υπολογιστεί η υδροστατική πίεση στον πυθμένα του δοχείου, όταν ο ανελκυστήρας βρίσκεται στη θέση $x_1 = 2m$.
γ) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται η υδροστατική πίεση στον πυθμένα του δοχείου σε συνάρτηση με τη θέση του ανελκυστήρα για τιμές από $x_0 = 0m$ έως $x_2 = 10m$.

12.120) Δύο δοχεία (1) και (2) περιέχουν νερό και κινούνται επάνω σε οριζόντιο επίπεδο σε αντίθετες κατευθύνσεις με επιταχύνσεις σταθερών μέτρων $\alpha_1 = \dfrac{10\sqrt{3}}{3} m/s^2$ και α_2 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι διευθύνσεις των ελεύθερων επιφανειών του νερού στα δύο δοχεία σχηματίζουν γωνία $\varphi = 90^o$. Θεωρούμε ότι τα κατώτερα σημεία των ελεύθερων επιφανειών του νερού στα δύο δοχεία βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογιστούν:



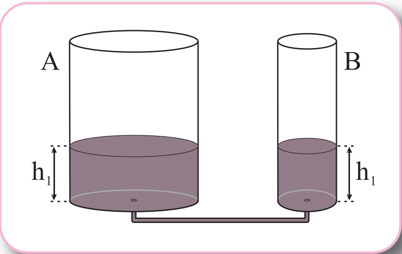
α) η γωνία θ_1 που σχηματίζει η ελεύθερη επιφάνεια του νερού στο δοχείο (1) με το οριζόντιο επίπεδο,
β) το μέτρο α_2 της επιτάχυνσης του δοχείου (2).

12.121) Η πειραματική διάταξη του σχήματος ονομάζεται μανομετρική κάψα. Αποτελείται από ένα μικρό δοχείο (κάψα), του οποίου η ανώτερη επιφάνεια κλείνεται με ελαστική μεμβράνη εμβαδού $A = 16 \cdot 10^{-4} m^2$. Η κάψα συγκοινωνεί με γυάλινο σωλήνα σχήματος U που περιέχει νερό πυκνότητας $\rho = 10^3 kg/m^3$. Αρχικά η στάθμη του νερού βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο στα δύο σκέλη του σωλήνα. Τοποθετούμε επάνω στην ελαστική μεμβράνη σώμα μάζας $m_1 = 160g$.



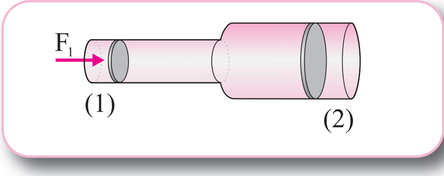
α) Να υπολογιστεί η πίεση που ασκείται στην ελαστική μεμβράνη λόγω του βάρους του σώματος.
β) Να υπολογιστεί η υψομετρική διαφορά της στάθμης του νερού στα δύο σκέλη του σωλήνα.
γ) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται η διαφορά της στάθμης του νερού στα δύο σκέλη του σωλήνα σε συνάρτηση με τη μάζα του σώματος που τοποθετείται στη μεμβράνη για τιμές από $m_0 = 0kg$ έως $m = 4m_1$.

12.122) Δύο δοχεία Α και Β έχουν διατομές εμβαδών $A_1 = 80cm^2$ και $A_2 = 20cm^2$ αντίστοιχα και συγκοινωνούν μεταξύ τους με σωλήνα αμελητέας χωρητικότητας. Οι πυθμένες των δύο δοχείων βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο δοχείο Α ρίχνουμε υδράργυρο όγκου $V = 2.000cm^3$. Δίνονται οι πυκνότητες του υδραργύρου και του νερού $\rho_υ = 13,6 \cdot 10^3 kg/m^3$ και $\rho_ν = 10^3 kg/m^3$ αντίστοιχα και η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at} = 10^5 Pa$. Να υπολογιστούν:



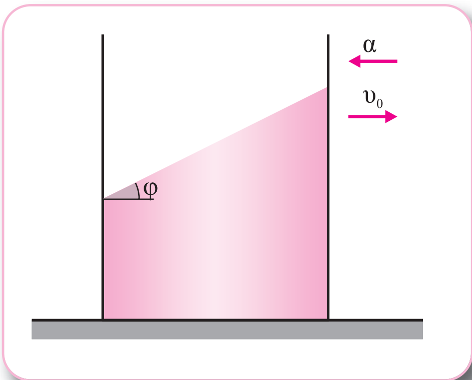
α) το ύψος της στήλης του υδραργύρου σε κάθε δοχείο, όταν ισορροπεί το σύστημα,
β) η ποσότητα του νερού που πρέπει να προστεθεί στο δεύτερο δοχείο Β, ώστε οι στάθμες των υγρών στα δύο δοχεία να έχουν υψομετρική διαφορά $\Delta h = 50,4cm$,
γ) η πίεση που ασκείται στον πυθμένα του δοχείου Α.

12.123) Το δοχείο του σχήματος είναι γεμάτο με ιδανικό υγρό και κλείνεται ερμητικά με δύο έμβολα (1) και (2) εμβαδών $A_1 = 10cm^2$ και $A_2 = 20cm^2$ αντίστοιχα. Κάθετα στην επιφάνεια του εμβόλου (1) ασκείται σταθερή δύναμη $F_1 = 200N$ και τα έμβολα (1) και (2) μετατοπίζονται κατά ℓ_1 και $\ell_2 = 8cm$ αντίστοιχα. Να υπολογιστούν:



α) η μετατόπιση ℓ_1 του εμβόλου (1),
β) η δύναμη F_2 που δέχεται το έμβολο (2),
γ) τα έργα W_{F_1} και W_{F_2} των δυνάμεων F_1 και F_2 αντίστοιχα,
δ) το μέτρο της σταθερής δύναμης F_2' που πρέπει να ασκηθεί στο έμβολο (2), ώστε να κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\alpha_2 = 2m/s^2$, εάν η μάζα του είναι $m_2 = 5kg$.

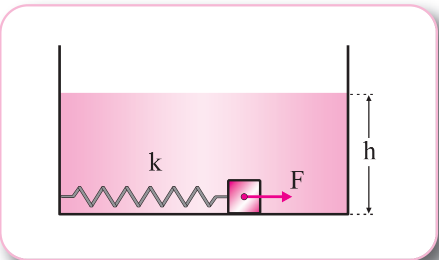
12.124) Ένα δοχείο περιέχει νερό. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ το δοχείο αρχίζει να κινείται με ταχύτητα μέτρου $υ_0 = 10m/s$ επάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του δοχείου και του επιπέδου είναι μ. Η ελεύθερη επιφάνεια του νερού σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία $\varphi = 30^o$. Να υπολογιστούν:



α) το μέτρο της επιβράδυνσης του δοχείου,

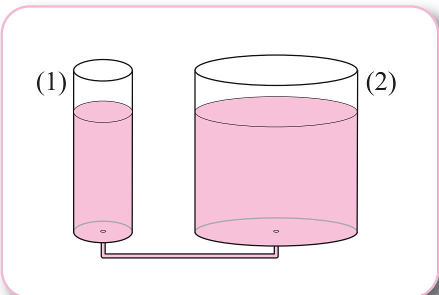
β) ο συντελεστής τριβής ολίσθησης,
γ) η χρονική στιγμή κατά την οποία σταματά το δοχείο,
δ) το διάστημα που θα διανύσει το δοχείο μέχρι να σταματήσει.

12.125) Μία δεξαμενή περιέχει μέχρι ύψους $h = 10m$ νερό πυκνότητας $\rho = 10^3 kg/m^3$. Στον πυθμένα της δεξαμενής βρίσκεται οριζόντιο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k, το ένα άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο και στο ελεύθερο άκρο του είναι δεμένο σώμα αμελητέου ύψους, εμβαδού βάσης $A = 1m^2$ και μάζας $m = 1.000kg$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ του σώματος και του πυθμένα της δεξαμενής είναι $\mu = 0{,}01$. Η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_{at} = 10^5 Pa$.
Α. Όταν στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $F = 2{,}2 \cdot 10^3 N$, το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $x_1 = 0{,}1m$ και το σώμα είναι έτοιμο να κινηθεί. Να υπολογιστούν:



α$_1$) η σταθερά k του ελατηρίου,
α$_2$) η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.
Β. Κάποια χρονική στιγμή αυξάνουμε το μέτρο της δύναμης σε F_1, χωρίς να μεταβάλουμε την κατεύθυνσή της, και το σώμα αρχίζει να κινείται και σταματά στιγμιαία, αφού διανύσει διάστημα $s = 0{,}1m$. Θεωρούμε ότι κατά την κίνηση του σώματος ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι ίσος με τον συντελεστή οριακής στατικής τριβής. Να υπολογιστεί το μέτρο F_1 της δύναμης.

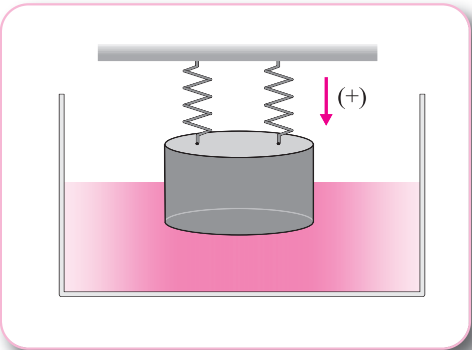
12.126) Δύο δοχεία (1) και (2) περιέχουν νερό πυκνότητας $\rho_v = 10^3 kg/m^3$ και έχουν διατομές εμβαδών $A_1 = 4 \cdot 10^{-3} m^2$ και $A_2 = 16 \cdot 10^{-3} m^2$ αντίστοιχα. Τα δύο δοχεία συγκοινωνούν μεταξύ τους με σωλήνα αμελητέας χωρητικότητας και οι πυθμένες τους βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επιπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το δοχείο (1) κλείνεται ερμητικά με έμβολο αμελητέου βάρους και το σύστημα ισορροπεί.
Α. Ασκούμε κάθετα στο έμβολο σταθερή δύναμη F_1 με φορά προς τα κάτω και το σύστημα ισορροπεί, έτσι ώστε η υψομετρική διαφορά της στάθμης του νερού στα δύο δοχεία να είναι $h = 0{,}1m$. Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης F_1.
Β. Ασκούμε κάθετα στο έμβολο δύναμη F_2 με φορά προς τα κάτω, έτσι ώστε το έμβολο να κινείται αργά και με σταθερή ταχύτητα. Να υπολογιστεί το έργο της δύνα-



μης F_2 από την αρχική θέση μέχρι η υψομετρική διαφορά της στάθμης του νερού στα δύο δοχεία να είναι $h = 0{,}1m$.

Γ. Στο δοχείο (2) προσθέτουμε λάδι μάζας $m_\lambda = 12{,}8kg$ και πυκνότητας $\rho_\lambda = 0{,}8 \cdot 10^3 kg/m^3$ και κάθετα στο έμβολο ασκούμε δύναμη $F_1 = 4N$ με φορά προς τα κάτω. Να υπολογιστεί η ανύψωση του εμβόλου, αφού ισορροπήσει το σύστημα.

12.127) Α. Ένας συμπαγής κύλινδρος ύψους $h = 2m$, μάζας $m = 20kg$ και με εμβαδόν βάσης $A = 10^{-2} m^2$ ισορροπεί μέσα σε μεγάλη δεξαμενή που περιέχει νερό πυκνότητας $\rho = 10^3 kg/m^3$. Ο κύλινδρος είναι ενωμένος στα ελεύθερα άκρα δύο όμοιων κατακόρυφων ιδανικών ελατηρίων με σταθερές $k_1 = k_2 = 200N/m$, τα άλλα άκρα των οποίων είναι ακλόνητα στερεωμένα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα ελατήρια είναι επιμηκυμένα κατά $x_1 = 0{,}2m$. Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at} = 10^5 Pa$. Να υπολογιστούν:



α_1) το ποσοστό στα εκατό του όγκου του κυλίνδρου που είναι βυθισμένος στο νερό,

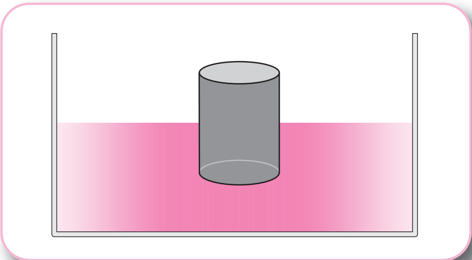
α_2) η πίεση στο σημείο του νερού που βρίσκεται στο ίδιο ύψος με τον πυθμένα του κυλίνδρου.

Β. Μετακινούμε ελαφρά τον κύλινδρο προς τα κάτω και τον αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί.

β_1) Να αποδειχθεί ότι ο κύλινδρος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

β_2) Να υπολογιστεί η περίοδος της ταλάντωσης, θεωρώντας ότι η στάθμη του νερού παραμένει σταθερή και ότι οι τριβές είναι αμελητέες.

12.128) Α. Ένας συμπαγής κύλινδρος ύψους $h = 3m$, μάζας $m = 30kg$ και με εμβαδόν βάσης $A = 2 \cdot 10^{-2} m^2$ ισορροπεί μέσα σε μεγάλη δεξαμενή που περιέχει νερό πυκνότητας $\rho = 10^3 kg/m^3$. Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at} = 10^5 Pa$. Να υπολογιστούν:



α_1) το ύψος του κυλίνδρου που είναι βυθισμένο στο νερό,

α_2) η πίεση σε ένα σημείο του νερού που βρίσκεται σε κατακόρυφη απόσταση $d = 1{,}5m$ κάτω από τον πυθμένα του κυλίνδρου.

Β. Μετακινούμε ελαφρά κατακόρυφα τον κύλινδρο προς τα κάτω και τον αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί.

$β_1$) Να αποδειχθεί ότι ο κύλινδρος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.
$β_2$) Να υπολογιστεί ο χρόνος που απαιτείται ώστε ο κύλινδρος να εκτελέσει τέσσερις ταλαντώσεις. Θεωρούμε ότι η στάθμη του νερού παραμένει σταθερή και ότι οι τριβές είναι αμελητέες.